Razvijanje matematičkog razumijevanja

Vesna Tutnjević,
Ljerka Jukić Matić, Osijek

Želja za pronalaskom smisla u svemu što vidimo, čujemo i saznajemo vođena je potrebom za razumijevanjem. Spoznaja o tome razumije li netko ono što ga pokušavamo naučiti ili ne, ključna je za učenje. Matematičko mišljenje i zaključivanje važni su za razvoj konceptualnog razumijevanja matematike. U ovom članku osvrćemo se na prirodu matematičkog razumijevanja, te načine na koje učitelji matematike mogu kod učenika razviti razumijevanje matematičkih ideja.

Razvijanje matematičkog razumijevanja

Nastavni planovi i programi te kurikulumi mnogih zemalja u današnje vrijeme stavljaju naglasak na razvoj razumijevanja. Većina učitelja matematike tvrdi da vrednuje znanje prema razumijevanju, no što to uistinu znači? I kako znamo da nešto razumijemo?

U studiji provedenoj u Australiji upravo je pitanje "Kako znate da nešto razumijete?" postavljeno učenicima osnovnih i srednjih škola. Većina učenika smatrala je da razumije matematički pojam onda kada mogu riješiti srodan problem i dobiti točno rješenje. Nekolicina ih je razumijevanje opisala kao osjećaj samopouzdanja, zadovoljstva ili uzbuđenja. Samo je malen postotak učenika razumijevanje povezao sa shvaćanjem zašto nešto funkcionira ili ima smisla, a još manji postotak povezao je razumijevanje sa sposobnošću da primijene svoje znanje na nepoznate probleme kao dokaz razumijevanja. Najbolji odgovor dali su učenici koji su znali da nešto razumiju kada su to mogli objasniti nekome drugome. Istraživanja u okviru matematičkog obrazovanja pokazuju da objašnjavanje pruža učenicima mogućnost da procijene svoje razumijevanje. To je također proces kroz koji se razumijevanje "pročišćava" i "rafinira", a s druge strane razvija sposobnost komunikacije vlastitih ideja.

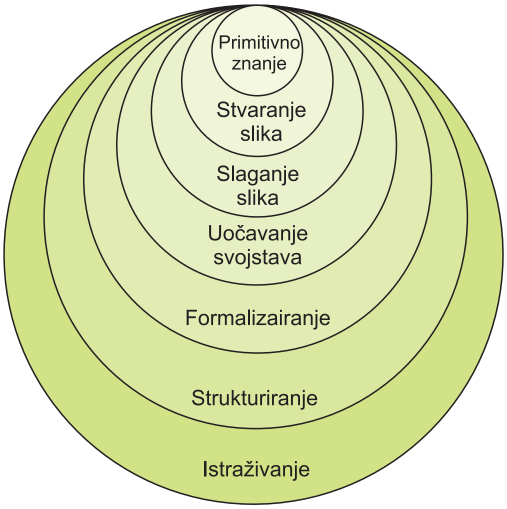
Pitanje bilo bi dobro postaviti i učenicima u našim školama. Vjerujemo da bismo dobili vrlo slične rezultate. Razumijevanje učenici često povezuju s uspješnim rješavanjem nekog zadatka – s poznavanjem procedure i točnim rezultatom. Nerijetko se i u razgovoru s odraslima, koji tvrde da im je matematika u školi "dobro išla", može čuti da su znali "izračunati". No, matematičko razumijevanje je puno više od samog računanja. Razumijevanje možemo promatrati kao uspostavljanje veza između ideja, činjenica ili procesa. Kada govorimo o matematičkom razumijevanju, u području matematičkog obrazovanja možemo naći nekoliko vrsta razumijevanja. Instrumentalno razumijevanje je znanje o tome što trebamo napraviti kako bismo izvršili matematički zadatak, a relacijsko razumijevanje odnosi se na znanje što trebamo napraviti kao i znanje zašto određeni matematički postupak funkcionira. Učenici koji matematiku uče kao niz čvrstih, minimalno povezanih pravila, čija je primjena ograničena samo na određeni tip zadataka ne mogu se prilagoditi rješavanju novih ili nerutinskih problema. Takvi učenici posjeduju instrumentalno razumijevanje, a njihovi postupci rezultat su želje za dolaskom do točnog rezultata. S druge strane, učenici koji posjeduju relacijsko razumijevanje imaju sposobnost konstrukcije povezanih konceptualnih mreža koje im omogućuju primjenu općih matematičkih pojmova na nepoznate probleme.

Razumijevanje možemo promatrati i kroz upotrebu stečenog znanja. Tako možemo razlikovati:

- "Znati da" je nešto istinito (npr. zbroj unutarnjih kutova u trokutu iznosi $180°$)
- "Znati kako" provesti postupak (npr. izračunati površinu trokuta)
- "Znati zašto" nešto vrijedi (npr. zašto se u algoritmu dijeljenja razlomka drugim razlomkom pojavljuje množenje i recipročan broj)
- "Znati djelovati" u trenutku (npr. iskorištavanje prilike za upotrebu strategije za rješenje nekog problema koje se sjetimo u trenutku rada)

Učenik se može naći u situaciji u kojoj posjeduje razumijevanje u oblicima "Znati da", "Znati kako" pa čak i "Znati zašto", ali najvažnije razumijevanje u obliku "Znati djelovati" zakazuje u trenutku kada je to potrebno.

U današnje vrijeme zna se da matematičko razumijevanje nije nešto što se posjeduje niti stvara, kako se to prije nekoliko desetljeća smatralo, već je to neprestani proces u kojem pojedinac preispituje značenje, ili pokušava pronaći smisao onoga što uči. Ovaj proces može se opisati kao pomicanje naprijed i natrag kroz niz povezanih slojeva ili nivoa [4], od kojih svaki sloj predstavlja određenu vrstu razumijevanja za nekog pojedinca i određenu temu (slika 1.).



Slika 1. Slojevi razumijevanja prema Pirie–Kieranovoj teoriji

Primitivno znanje je mjesto na kojem neodređeno matematičko razumijevanje počinje rasti. Unutar *stvaranja slika* učenici koriste prethodno znanje na nove načine, dok se *slaganje slika* odnosi na mentalnu konstrukciju teme. Kada učenici mogu kombinirati svojstva određenih slika kako bi došli do bitnih općih svojstava, tada se nalaze u području *uočavanja svojstava*. *Formaliziranje* označava da učenici dolaze na razinu apstrakcije, dok je *promatranje* proces koordiniranja i vraćanja na formalne aktivnosti te postavljanje takvih koordinacija u obliku teorema. Kada učenici pokušavaju svoja razmatranja predstaviti kao teoriju, tada se oni nalaze u području *strukturiranja*, dok *istraživanje* predstavlja mogućnost odmaka od postojećeg razumijevanja i postavljanje novih pitanja.

Školska matematika i istraživačka matematika

Kada promatramo vrste matematičkih pogrešaka koje učenici čine, prirodno je pretpostaviti da se one događaju zbog nedostatka razumijevanja. Zapravo pogreške nastaju zbog upotrebe "iskrivljenih" pravila unutar dobro utemeljenog postupka. Primjer koji slijedi dobro ilustrira ovu definiciju. U primjeru je prikazan rad učenika koji je pokušao riješiti sustav dviju jednadžbi s dvjema nepoznanicama. Umjesto zbrajanja dviju jednadžbi, učenik je od prve jednadžbe oduzeo drugu i pretpostavio da će ovaj postupak eliminirati nepoznanicu y. Zatim je provjerio svoja rješenja uvrštavajući ih u jednadžbu ($x = 8$, $y = 6$) i shvatio da rezultat nije točan:

$$\begin{array}{c} 2x+y=10 \\ \underline{x-y=2} \\ x=8 \end{array}$$

Uvrstimo x:

$$8-y=2$$
$$y=6$$

Kada je učeniku predloženo da bi bilo prikladnije zbrojiti jednadžbe, njegov odgovor je bio: "Ali tako je nam je učiteljica pokazala, naučila nas je da uvijek oduzimamo jednadžbe!"

Učiteljica vjerojatno nije na ovaj način objasnila postupak, no učenik je ovako interpretirao njezine riječi te samoinicijativno generalizirao savjet o rješavanju sustava dviju jednadžbi. Ovaj primjer pokazuje kako će učenici, ukoliko samostalno pokušaju ponoviti postupke koje je učitelj demonstrirao, bez razumijevanja o tome kako i zašto taj postupak funkcionira, stvoriti vlastita pravila. Tim pravilima i neutemeljenim razlozima njihove upotrebe, učenici nastoje stvoriti vlastito razumijevanje.

Često se pretpostavlja da učenje uključuje ovladavanje određenom vrstom znanja i procedura. Također, pretpostavlja se da je posao učitelja raščlaniti takve procedure na niz malih, lako zapamtljivih koraka, te demonstrirati točnu tehniku ili algoritam, nakon čega učenici individualno vježbaju upotrebu procedure kroz rješavanje zadataka. Ovo nazivamo kulturom *školske matematike*, gdje su podučavanje i učenje strukturirani kao prijenos informacija. Međutim, kako je ilustrirano u prethodnom primjeru, znanje se ne može direktno prenijeti s učitelja na učenike. Osim toga, učenici često reinterpretiraju i transformiraju riječi i postupke učitelja. S druge strane, postoji *istraživačka matematika*, gdje učenici uče govoriti i djelovati matematički postavljajući pitanja, predlažući rješenja, te rješavajući nove i nepoznate probleme.

Posljednjih godina povećao se interes za proučavanje ovih dviju kultura učenja i podučavanja matematike, kao i utjecaja svake od njih na učenička postignuća u matematici. Istražujući kako matematiku uče srednjoškolci u Engleskoj, Boaler [1] je došla do zanimljivih i vrlo značajnih saznanja. U svojem istraživanju odabrala je dvije škole koje imaju učenike sličnog socio-ekonomskog statusa i kulturološkog profila, no metode podučavanja u tim školama bitno su se razlikovale. Učitelji matematike u prvoj školi koristili su tradicionalne metode podučavanja, to jest gore opisanu kulturu školske matematike. Provjere znanja sastojale su se isključivo od pismenih provjera koje su ujedno pripremale učenike za završni ispit iz matematike. Učionice su ovdje bile tihe i mirne, a učenici su se činili motivirani i vrijedni. Ipak, kroz razgovore, učenici su otkrili kako ne vole matematiku koja im je bila težak i dosadan predmet. Također, unatoč njihovoj marljivosti u rješavanju zadataka i pozornom slušanju, ovaj pasivan pristup radu onemogućio im je primjenu tog znanja na nepoznatim primjerima. Boaler smatra kako je to zbog toga što su učenici razvili inertno znanje, koje je pripisala uvjerenju kako učenje matematike zahtijeva pamćenje niza pravila, jednadžbi i formula.

Pristup podučavanja u drugoj školi bio je progresivniji, a predavanja često prilično nestrukturirana. Učenici su većinom radili na raznim projektima gdje je naglasak bio na značenju i objašnjavanju nečijeg mišljenja. Nastavnici su se vodili idejom da se učenici trebaju susresti s matematikom u kontekstu koji je realističan i značajan, a nove matematičke sadržaje podučavali kada se kroz rad na projektima ukazala potreba za novim znanjem. Većina učenika uživala je u ovom istraživačkom pristupu učenju i smatrali su matematiku zanimljivom jer je uključivala razmišljanje i rješavanje problema.

Učenici druge škole pokazali su se kao fleksibilni i prilagodljivi matematičari koji su u mogućnosti primijeniti svoje znanje na nepoznate probleme, a njihov uspjeh na konvencionalnim završnim ispitima bio je bolji od učenika iz tradicionalne nastave. Ovo istraživanje, kao i brojne druge studije, pokazuju kako podučavanje školske matematike učenicima pruža samo instrumentalno razumijevanje – "znati da" i "znati kako", dok istraživačka matematika generira relacijsko razumijevanje – "znati zašto" i "znati djelovati".

Matematičko mišljenje, zaključivanje i rješavanje problema

Jedan od značajnijih ciljeva nastave matematike je osposobiti učenika za matematičko mišljenje i zaključivanje. Svaki učitelj matematike povremeno se zapita kako može provjeriti razvija li učenik matematičko mišljenje kroz učenje koje se odvija na satu matematike. Jedan od mogućih načina je korištenjem strukture koja identificira kategorije mišljenja različite složenosti:

- Prepoznavanje – označava da učenik shvaća da se poznati matematički postupak može primijeniti u novoj situaciji.
- Povezivanje – označava da učenik koristi nekoliko poznatih matematičkih postupaka kako bi riješio nepoznat problem.
- Konstrukcija – označava da učenik odabire poznate strategije, matematičke ideje i koncepte te ih integrira u rješavanju nepoznatog zahtjevnog problema.

Matematičko zaključivanje obuhvaća stvaranje, istraživanje i vrednovanje pretpostavki te razvijanje matematičkih argumenata koji će nas uvjeriti da je pretpostavka točna. Yackel i Hanna [6] tvrde da su objašnjavanje i argumentiranje ključni aspekti matematičke aktivnosti učenika u učionici, u kojoj se matematika podučava kroz samostalno zaključivanje. Kada nastavnik zada zadatak u kojem učenici moraju istražiti veze među matematičkim objektima te sudjelovati u raspravi i preispitivanju tvrdnji drugih učenika, tada učenici uče kako objašnjavati i argumentirati svoje zaključke na primjeren način.

Rješavanje problema poveznica je svih aspekata matematičkog učenja. Velik dio istraživanja posvećenog rješavanju problema u nastavi matematike odvijao se tijekom 1980-ih i 1990-ih godina. Rješavanje problema uvedeno je u ciljeve nastave matematike u mnogim zemljama, a također i u Hrvatskoj. Zanimljivo je da su *problemi* i *rješavanje problema* imali kroz povijest razna, često i kontradiktorna značenja. Većina se nastavnika danas slaže da se zadatak smatra problemom ako osoba koja pokušava riješiti problem ne zna metodu rješavanja unaprijed. To znači da bi određeni zadatak mogao biti problem jednoj osobi, dok bi drugoj bio rutinska vježba.

Uvjerenja i stavovi mogu povećati aktivnost učenika ili na neki način utjecati na njih. Ta uvjerenja predstavljaju učenikov pogled na matematiku – o sebi kao matematičaru, o matematičkom obrazovanju te matematici kao predmetu. Uvjerenja o sebi utječu i na stavove, osobito one koji se odnose na motivaciju, samopouzdanje i volju za riskiranjem, a odražavaju se kroz sposobnost učenika da svoju pažnju zadrži na nekom zadatku. Nastava koja promovira pamćenje, formalne procedure i točne odgovore bez obzira na razumijevanje, može učenika dovesti do uvjerenja da je on samo pasivni promatrač, da nije sposoban predložiti i argumentirati vlastite ideje. Postavljajući učenicima primjerena pitanja, nastavnici mogu učenicima biti potpora tijekom rješavanja problema te im na taj način pomoći da razviju svijest o svojem matematičkom znanju i osposobiti ih da reguliraju svoje mišljenje. Takva pitanja nazivaju se potporna pitanja, a njihova glavna karakteristika je da ih učenici mogu sami sebi postaviti i kada više nemaju potporu nastavnika (tablica 1).

Nakon uvida u problem/zadatak
Koje su ideje ovdje važne?
Što se zahtijeva u zadatku?
Koje su nam informacije poznate?
Koje uvjete moramo poštivati?
Možete li pogoditi neko rješenje?
Koju bismo strategiju mogli iskoristiti?

Za vrijeme rješavanja problema
Recite mi što radite.
Zašto mislite da taj postupak ima smisla?
Zašto mislite da je ta ideja bolja od druge?
Možete li opravdati ovaj korak?
Možete li naći protuprimjer?
Jeste li sigurni u ovaj dio?

Kada učenici završe
Jeste li razmotrili sve slučajeve?
Jeste li provjerili svoje rješenje?
Ima li dobiveno rješenje smisla?
Možete li poopćiti problem?
Možete li proširiti problem na druge situacije?
Možete li objasniti rješenje drugima u razredu?

Tablica 1. Primjer potpornih pitanja

Stvaranje razredne zajednice istraživanja

Nastavnik matematike ima veliku ulogu u razvijanju matematičkog razumijevanja kod učenika, a podučavanje kroz istraživačku matematiku vodi k dubljem razumijevanju i fleksibilnijem razmišljanju. Nedavnim istraživanjima temeljenim na socijalnom konstruktivizmu pokušalo se doći do odgovora kako matematička učionica može postati istraživačka zajednica te što bi nastavnici trebali napraviti da bi zainteresirali učenike za matematičko mišljenje, zaključivanje i rješavanje problema. Iako je nemoguće sastaviti listu postupaka kojih bi se učitelji trebali pridržavati, postoje određene smjernice koje opisuju istraživačku razrednu zajednicu te učiteljevu ulogu u takvom okruženju. Kao ključne dijelove učiteljeve uloge možemo navesti sljedeće:

- modeliranje matematičkog mišljenja kod učenika
- postavljanje pitanja kao potporne strukture kod razvijanja matematičkog mišljenja
- razvijanje socijalne interakcije među učenicima
- povezivanje ideja učenika s matematičkim jezikom i simbolima.

Ne treba podcijeniti izazov implementiranja ovakvog načina podučavanja u osnovne i srednje škole. Često se čini kako količina gradiva koju učitelj mora obraditi i vrednovanje znanja sprječavaju razvijanje razumijevanja i matematičkog mišljenja. To je težak zadatak, a osobito kada smo suočeni s razredom u kojem su učenici naučeni vjerovati da je podučavanje prenošenje informacija, a učenje pamćenje niza formula i vježbanje istih kroz zadatke. Iako se frontalna nastava u velikoj mjeri napušta u hrvatskim školama, i koriste razne metode i oblici rada, mnogi nastavnici ističu kako im postojeći plan i program onemogućava ovakvu nestrukturiranu nastavu, te su ograničeni na rješavanje zadataka, a ne problema. Nastavnici također ističu i bojazan od gubitka kontrole nad nastavnim procesom i neostvarivanja zadanih ciljeva u slobodnijoj nastavi. Ipak, rezultati mnogih istraživanja pokazuju kako pristup podučavanju istraživačkom matematikom nudi učenicima mogućnost napretka u radu, te stimulira socijalnu interakciju na najefikasniji način, a znanje se u takvom okruženju stječe uz razumijevanje. Stoga svakako predlažemo implementaciju istraživačke matematike barem za određene nastavne teme.

LITERATURA

1/ J. Boaler: *Mathematics from another world: Traditional communities and the alienation of learners*, Journal of Mathematical Behavior, 18(4) (2000.), 1–19.

2/ V. Goose, G. Stillman, C. Vale: *Teaching Secondary school mathematics*, Allen and Unwin, Australija, 2008.

3/ R. Even, D. Tirosh: *Teachers' knowledge and understanding of students' mathematical thinking*, in L. English (Ed.), International handbook of research in mathematics education, Mahwah, NJ: Erlbaum 2002., pp. 219–240.

4/ S. E. B. Pirie, T. Kieren, *Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it?* Educational Studies in Mathematics, 26 (1994.), 165–190.

5/ J. Mason, M. Spence, *Towards a psychology of knowing-to*, in C. Kanes, M. Goos and E. Warren (eds), Teaching mathematics in new times (Proceedings of the 21st annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Brisbane: MERGA, 1998., pp. 342–349.

6/ E. Yackel, G. Hanna, *Reasoning and proof*, in J. Kilpatrick, W. G. Martin and D. Schifter (eds), A research companion to principles and standards for school mathematics Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2003., pp. 227–236.