Yin i yang

Branimir Dakić, Zagreb

U udžbeniku ***Matematika 1*** (2. dio)[1] u poglavlju u kojem se obrađuju opseg i površina kruga (str. 151./152.) nalazi se i nekoliko tematski međusobno bliskih zadataka. Navedimo tri takva:

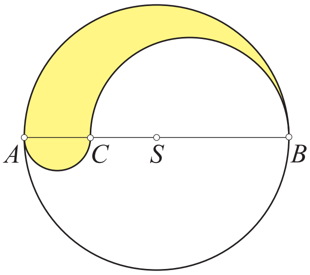
Zadatak 1. Ako je $|AB| = 2r$, $|AC| = 2m$, kolika je površina obojenog dijela velikog kruga (slika 1)?

Zadatak 2. Ako je promjer kruga jednak 2r, kolika je povšina obojenog dijela kruga (slika 2)?

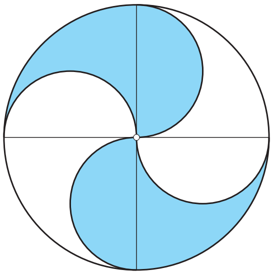
Zadatak 3. Krug je podijeljen na pet dijelova kao na slici. Dokaži da su površine tih dijelova jednake. Dokaži da je opseg svakog od tih dijelova jednak opsegu kruga (slika 3).

Rješenje prvog zadatka:

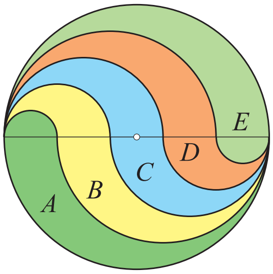
$$\frac{r^2\pi}{2} - \frac{(r-m)^2\pi}{2} + \frac{m^2\pi}{2} = rm\pi.$$



Slika 1.



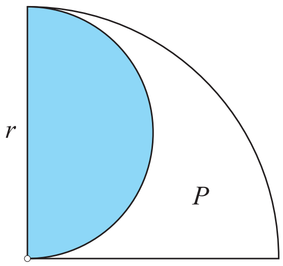
Slika 2.



Slika 3.

[1] Dakić, Elezović, *Matematika 1*, 2. dio, ELEMENT, Zagreb

Rješenje drugog zadatka:



Slika 4.

Kako je površina četvrtine kruga jednaka $\frac{r^2\pi}{4}$, a površina malog polukruga jednaka $\frac{r^2\pi}{8}$, onda je i $P = \frac{r^2\pi}{8}$. Dakle, površina obojenog dijela kruga jednaka je polovini površine cijelog kruga.

Pogledajmo i rješenje trećeg od ovih zadataka. Označimo velikim slovima A, B, C, D i E dijelove velikog kruga iznad promjera. Neka je r polumjer najmanje polukružnice. Tada je

$$P(A) = \frac{1}{2}r^2\pi.$$

Dalje je $P(B) = \frac{1}{2}(2r)^2\pi - P(A) = \frac{3}{2}r^2\pi.$
Zatim imamo

$$P(C) = \frac{1}{2}(3r)^2\pi - \frac{1}{2}(2r)^2\pi = \frac{5}{2}r^2\pi.$$

Nastavimo računati, pa tako nalazimo:

$$P(D) = \frac{7}{2}r^2\pi, \qquad P(E) = \frac{9}{2}r^2\pi$$

i sada koristeći simetriju zaključujemo kako su površine svih pet dijelova jednake:

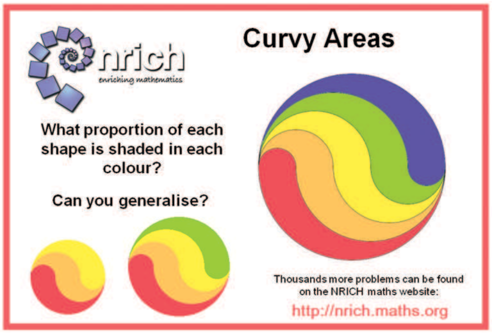
- tamnozelena i svjetlozelena: $P(A)+P(E)=5r^2\pi$
- žuta i smeđa: $P(B) + P(D) = 5r^2\pi$
- plava: $2P(C) = 5r^2\pi$.

Ukupno je to $25r^2\pi$ što je jednako površini cijelog kruga.

Rješavanje drugog dijela zadatka prepuštamo čitateljima.

Ovaj problem zatječemo i na internetskim stranicama ***NRICH-projekta***.[2]

Evo preslike postera.

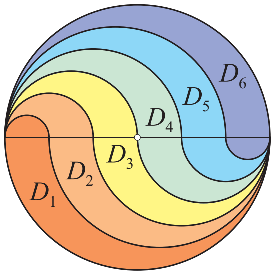


Slika 5.

Valja uočiti kako je postavljen problem na ovom posteru. Vidimo kako se najprije rješava jednostavan problem rezanja kruga na tri dijela, slijedi nešto složeniji zadatak s rezanjem na četiri dijela pa na pet da bi se potom zapitalo: *Možete li poopćiti (problem i rješenje)?*

Provjerimo sljedeću pretpostavku koja slijedi iz prethodno razmotrenih primjera:

Ako je krug polumjera r izrezan na n dijelova onako kako se to vidi na slici, tada je površina svakog pojedinog dijela jednaka $\frac{1}{n}$ površine kruga.



Slika 6.

Označimo s $D_1, D_2, \ldots, D_n$ dijelove velikog polukruga iznad njegovog promjera. Polumjer najmanjeg polukruga jednak je $\frac{r}{n}$. Polumjer sljedećeg je

[2] *NRICH project – enriching mathematics* je zajednički projekt *Fakulteta edukacijskih znanosti (Faculty of Education) Sveučilišta u Cambridgeu* i tamošnjeg *Centra za matematičke znanosti (The Centre for Mathematical Sciences)*. Pokrenut je 1996. godine te putem interneta nudi učenicima svih uzrasta, nastavnicima matematike i svima koji su na bilo koji način vezani uz nastavu i učenje matematike obilje raznovrsnih materijala. Svi su materijali besplatni, a projekt provodi skupina iskusnih i sposobnih učitelja matematike. Riječ je o jednom od najkvalitetnijih projekata ove vrste na svijetu pa ga čitateljima MiŠ-a svesrdno preporučujemo.

$\frac{2r}{n}$ itd. Općenito je polumjer k-tog polukruga jednak $\frac{kr}{n}$. Tada je površina svakog pojedinog dijela D_k jednaka razlici površina polukruga polumjera $\frac{kr}{n}$ i polukruga promjera $\frac{(k-1)r}{n}$. Dakle:

$$\begin{aligned} P(D_k) &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{k^2r^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2 r^2}{n^2}\right) \\ &= (2k-1)\frac{r^2\pi}{2n^2}. \end{aligned}$$

Ako sada zbrojimo površine jednakoobojenih dijelova gornjeg i donjeg polukruga, dobit ćemo:

$$\begin{aligned} &P(D_k) + P(D_{n+1-k}) \\ &= (2k-1)\frac{r^2\pi}{2n^2} + (2(n+1-k)-1)\frac{r^2\pi}{2n^2} \\ &= \frac{r^2\pi}{n}. \end{aligned}$$

To je očito $\frac{1}{n}$ ukupne površine kruga i to je površina svakog pojedinog dijela.

Jednostavno je dokazati i da je opseg svakog od dijelova jednak opsegu kruga.

* * *

Vratimo se sada prvom zadatku sa samog početka članka.

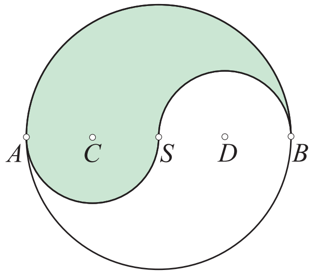
Je li vas slika 1 na nešto podsjetila? Vjerujem da jest, na jedan od vizualnih simbola koji je naširoko poznat pod nazivom **taijitu** (*taj-đi-ču*). Zovu ga još i **yin-yang** (*jin-jang*) ili ***tai-chi*** (*taj-či*) simbolom. Potječe iz kineske tradicije, ali se može zateći i šire na području Dalekog istoka. Danas je pak široko rasprostranjen po cijelom svijetu.

Simbol čini krug podijeljen na dva sukladna dijela od kojih je jedan (yin) obojen u crno, a drugi (yang) u bijelo. Predstavlja dvije komplementarne suprotnosti, dvojnosti koje se nadopunjuju i koje čine jedinstvo, jedna bez druge nemaju smisla. Jer nema crnog bez bijelog, ružnog bez lijepog, nema zla bez dobra, svjetla bez tame, muškog bez ženskog. Nema smrti bez života.

Slika 7.

No, nije nam bila namjera baviti se podrobnije filozofskom i religijskom stranom yin-yanga već obraditi njegov geometrijski oblik te dodati još poneki problemčić.

Kako konstruirati sam znak? Vrlo jednostavno:



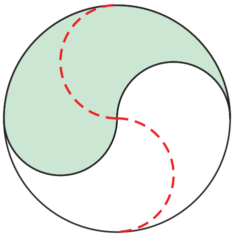
Slika 8.

Nacrtamo krug sa središtem S i promjerom $\overline{AB}$. Zatim konstruiramo točke C i D kao polovišta dužina $\overline{AS}$ i $\overline{BS}$. Nad tim dužinama sa suprotnih strana pravca AB konstruiramo polukružnice.

Yin-yang simbol u svoju je vrlo čuvenu knjigu *Amusements in Mathematics* uvrstio i engleski matematičar Dudeney[3]. Yin-yang naziva **velikom monadom** (*The Great Monad*) i kaže da je vrijedan osobite pozornosti jer je za Kineze ono što je za kršćane križ. Postavlja tri zadatka od kojih izdvajamo drugi i treći:

- Podijeli yin-yang na dva dijela jedakih površina.
- Podijeli yin-yang na četiri dijela jednakih površina, ali različitih oblika.

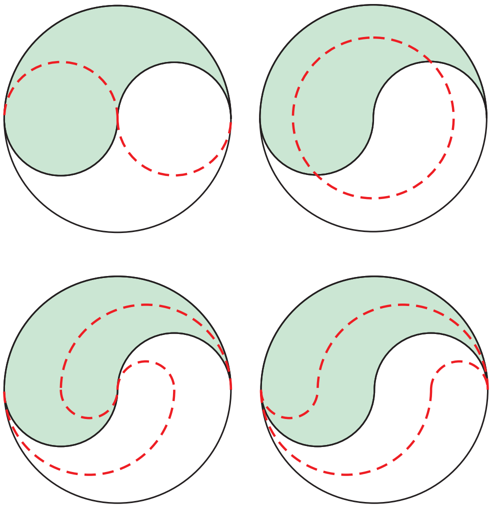
[3] Henry Ernest Dudeney (1857.–1930.), engleski matematičar, jedan od najpriznatijih autora matematičkih zagonetki, objavio više knjiga iz zabavne (rekreativne) matematike.



Slika 9.

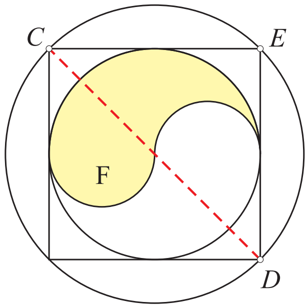
Na slici vidimo rješenje prvog od ovih dvaju zadataka, onako kako ga je u svojoj knjizi naveo sam Dudeney. Yin-yang su podijeljeni čak na četiri sukladna dijela crvenom crtkanom linijom.

No to nije i jedino rješenje ovog zadatka. Na narednim slikama vidimo ih još četiri. Prepuštamo njihovo tumačenje čitateljima. Možda baš vi pronađete još neko rješenje ovog problema.

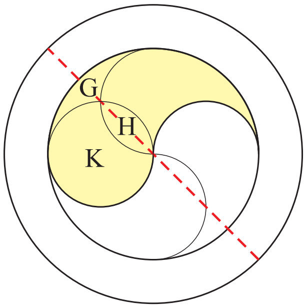


Slika 10.

Opišimo rješenje drugog Dudeneyjeva podzadatka onako kako ga je on naveo. Rješenje je rez dužinom $\overline{CD}$ (vidi sliku). No ostaje dokazati da je površina od F uistinu polovina površine yina ili yanga. To vidimo na slici desno. Krug $K+H$ četvrtina je površine kruga koji sadrži yin i yang. Prema prethodnom zadatku $K+G$ je četvrtina površine istoga kruga. Očigledno je G jednako H. Time ono što F gubi od $K+G$ nadoknađuje od H, pa je F polovina od yina ili yanga.



Slika 11.



Slika 12.

Opisano rješenje možda je u izričaju malo konfuzno, ali je sâm problem elementaran i vjerujemo da čitatelji neće imati problema s razumijevanjem autorove ideje.

I na kraju, dodajmo nekoliko zanimljivosti:

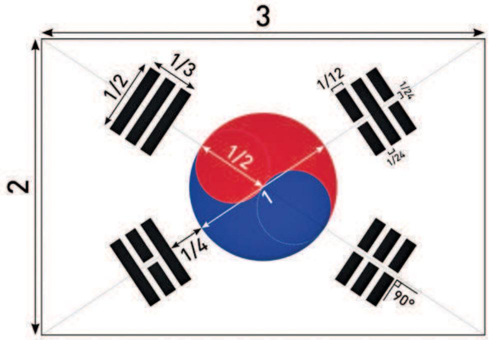
Yin i yang često ćemo zateći na raznim mjestima, ne samo na Dalekom istoku već i šire, primjerice u irskim tradicionalnim amblemima. Jedan je primjer i logotip transkontinentalne sjevernoameričke željeznice čija je gradnja započela 1870. Pruga ove trase duga je približno 6800 milja. Kako je došlo do toga da je u logotip željezničke kompanije ugrađen yin-yang, tko bi znao.

Slika 13.

Zanimljiv je još jedan primjer, vezan uz misterioznu pojavu krugova u žitu[4]. Fotografija je djelo Engleskinje Lucy Pringle koja se više od 20 godina bavi snimanjem ovoga čuda.

Slika 14.

Iz mnoštva primjera izdvojimo na kraju još jedan, manje tajanstven. Riječ je o zastavi Republike Koreje (Južne Koreje), službenom simbolu ove zemlje od 15. listopada 1949. Podsjetimo kako je korejski poluotok u kolovozu 1945. godine 38. paralelom podijeljen na dva dijela, Sjevernu i Južnu Koreju. U središtu zastave na bijeloj podlozi (tradicionalna korejska boja koja simbolizira čistoću naroda) su yin i yang u crvenoj, odnosno plavoj boji. Taj krug znači izvor svih stvari u svemiru i naziva se *taeguk*. U četiri kuta zastave smještene su skupine crtica. Tri crtice gore lijevo simboliziraju nebo-zrak, crtice dolje lijevo vatru, tri razlomljene crtice dolje desno simboliziraju zemlju, a one gore desno vodu (uz napomenu kako je ovaj opis površan).



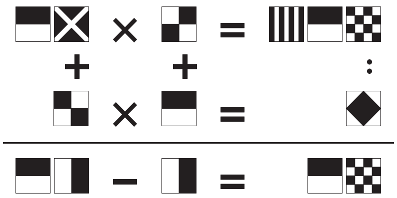
Slika 15.

[4] Vidi Panoptikum, MiŠ 67.

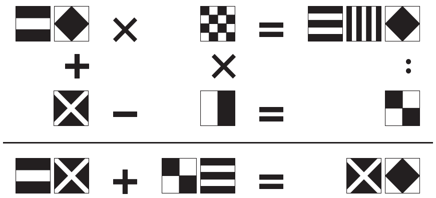
MATEMATIČKI REBUSI

Zamijenite simbol odgovarajućom znamenkom!

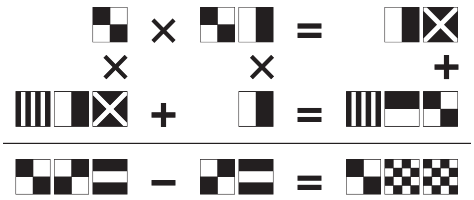
1.



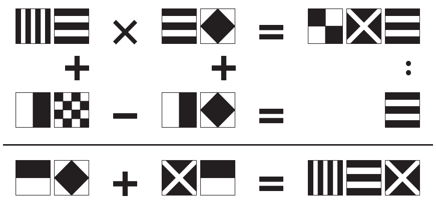
2.



3.



4.



Odgovori:
1. 24 × 5 = 120, 3 × 2 = 6, 27 − 7 = 20
2. 60 × 3 = 180, 9 − 7 = 2, 69 + 21 = 90
3. 2 × 24 = 48, 148 + 4 = 152, 296 − 96 = 200
4. 15 × 53 = 795, 48 − 43 = 5, 63 + 96 = 159