

Quo vadis, didaktički trokute?

Nastava matematike od didaktičkog trokuta do socio-didaktičkog tetraedra



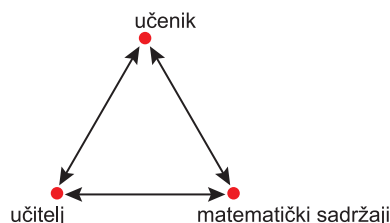
Dubravka Glasnović Gracin,
Zagreb

Svaki se nastavnik tijekom svojeg pedagoškog i metodičkog obrazovanja zasigurno susreo s pojmom didaktičkog trokuta. Radi se o odnosu između *učenika*, *nastavnika* i *matematičkih sadržaja* kao osnovnom konstruktivnom nastave matematike. Ovaj odnos prikazan je modelom trokuta čijim vrhovima su pridružena navedena tri pojma. Važnost nastavnih sredstava u poučavanju matematike dovodi do proširenja didaktičkog trokuta na

didaktički tetraedar. U njemu proučavamo odnos između učenika, nastavnika, matematičkih sadržaja i sredstava (tehnologije) s pomoću kojih poučavamo matematiku. No, je li time izgradnja modela završila? Čini se da nije, jer socijalni i institucionalni parametri itekako utječu na nastavu matematike, samo ih često nismo svjesni. U nastavku slijedi pregled izgradnje modela od didaktičkog trokuta preko didaktičkog tetraedra do socio-didaktičkog tetraedra.

Didaktički trokut: *učenik-učitelj-matematika*

U povijesnom razvoju didaktičke teorije izgradili su se osnovni faktori nastave: nastavnik, učenik i nastavni sadržaji (Poljak, 1970). Ova trojka se tradicionalno spominje u svojoj relevantnoj didaktičkoj literaturi, počevši od *Didacticae Magne*, slavnog djela Komenskog iz 17. stoljeća. Ako ovu sliku primijenimo na matematičko obrazovanje, ona će sadržavati učenika, učitelja i matematički sadržaj (slika 1).



Slika 1. Didaktički trokut

No, dublje promišljanje o didaktičkom trokutu do-
vodi do pitanja poput, primjerice (Shoenfeld, 2012):

- Na koji način nastavnik posreduje između učenika i matematike?
- Na koji način nastavnik pomaže u oblikovanju učenikova shvaćanja matematike?

Ova pitanja sugeriraju da je prikazivanje učenja matematike preusko i nedovoljno objašnjeno samo kroz dani model didaktičkog trokuta. Stoga je potrebno "revidirati" didaktički trokut. Konzultiranje literature na tom tragu nas vodi do francuskih autora Brousseaua i Chevallarda. Brousseau (1997.), u svojem konstruktivnom modelu učenja, učenika i tzv. *milieu* (npr. nastavne materijale, strategije učenja i poučavanja, zadatke i sl.). Chevallard (1982.) je uveo ideju didaktičkog sustava (franc. *système didactique*) koji se sastoji od triju komponenata: učitelja, učenika i (matematičkog) sadržaja koji se uči te veza između tih komponenata. Chevallard pritom vrlo ozbiljno pristupa ideji didaktičkog sustava jer u koncept uključuje i institucije i društvo u kojem se odvija nastava. U svakom od ovih primjera nastavnik, učenik i (matematički) sadržaj čine vrhove klasičnog didaktičkog trokuta koji služi za konceptualizaciju učenja i poučavanja. Ipak, promišljanja Brousseaua i Chevallarda su filozofski utemeljena i vrlo duboko ulaze u problematiku toga što se događa u nastavi jer sama aktivnost učenja i poučavanja u sebi sadrži još neke komponente osim učenika, učitelja i nastavnog sadržaja. To su, primjerice, kontekst i društveno okruženje, pitanja što je matematika i što znači učiti i poučavati matematiku i sl.¹

Trokut: učenik-tehnologija-matematika

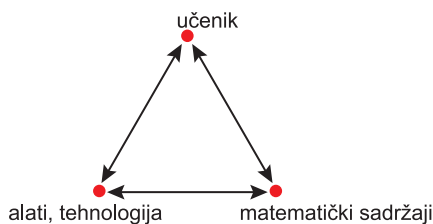
Nastavna sredstva i pomagala su oduvijek bila važan faktor za aktivnosti učenja i poučavanja matematike. Prisjetimo se samo vizija Felixa Kleina o zornosti u nastavi matematike o kojima je bilo riječi u Miš-u br. 56. I prije ere informacijsko-komunika-

cijske tehnologije (IKT), usvajanju apstraktnih matematičkih koncepata uvelike su stoljećima pomagali konkretni modeli, udžbenici, jezik, geometrijski pribor i ostali alati, te tablice, vizualizacije poput grafova i shema i sl. Razvojem računala i IKT-a uloga tih sredstava još je više naglašena. U literaturi se nabrojani alati u širem smislu često nazivaju artefaktima. Artefakti su svi oni alati koje je stvorio čovjek s ciljem produkcije ili reprodukcije sredstava za preživljavanje (Wartofsky, 1979.). Artefakti u nastavi stoga obuhvaćaju tehnologiju, konkretne alate, IKT, slike, ali i jezik, zadatke, organizaciju, podjelu rada i sl.

Brojna istraživanja pokazuju da se korištenje tehnologija, alata i udžbenika u nastavi matematike ostvaruje uzajamnim djelovanjem artefakata i korisnika (Rezat i Strässer, 2012.). Ti artefakti pomažu u usvajanju matematičkih koncepata. Wertsch (1998.) kao primjer spominje povijest i razvoj skoka s motkom, prikazujući kako poboljšanja u tehnologiji izrade motke pomažu atletičarima da skoče sve više. Besmisleno je pritom izolirati samo skakača ili samo motku – jer oni čine uzajamnu cjelinu koja dovodi do željenih rezultata. Isto je i s primjenom tehnologije i ostalih alata u nastavi matematike. Razvoj npr. računala i njihova primjena u nastavi matematike, zajedno s učenikom koji promišlja dovodi nas do željenih rezultata. Kompleksni matematički računi i problemi rješavaju se u "partnerskom" odnosu u kojem sudjeluju ljudski um i tehnologija.

Primjena artefakata u nastavi čini srž tzv. teorije aktivnosti (engl. *activity theory*). Tu je naglasak stavljen na ljudsku aktivnost s raznim artefaktima koji posreduju između subjekta i objekta učenja (Engeström, 1998.). Osnovni dijelovi ove teorije su dakle subjekt, objekt i posredujući artefakt. Izvori ideje za ovu trojku nalaze se u radovima ruskog psihologa Lava Semjonoviča Vigotskog. Artefakt se pritom odnosi na sredstvo koje posreduje između subjekta (učenika) i objekta (onog što se uči). To može biti kalkulator, računalo, udžbenik, vizualizacija i sl. Primijenimo li ovu ideju na aktivnosti u matematičkom obrazovanju, dobit ćemo trokut s vrhovima učenik-artefakti-matematički sadržaji (slika 2).

¹ Zahvaljujem kolegici Ani Katalenić, prof., na korisnim komentarima vezanim uz učenje Brousseaua i Chevallarda

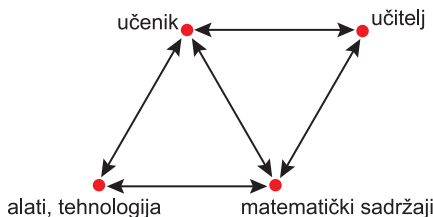


Slika 2. Trokut Vigotskog

Ovaj trokut je jako važan za matematičko obrazovanje jer proizlazi iz ideje da korištenje artefakata (tehnologije, udžbenika, alata) vodi k boljem razumijevanju matematike. Rad s raznim sredstvima u nastavi matematike omogućuje širok spektar matematičkih aktivnosti. Tako učenici mijenjaju svoje iskustvo o matematici i uče. Također, aktivnosti s alatima ne čine alate pasivnim izvorima, već oni aktivno oblikuju te aktivnosti.

Didaktički tetraedar

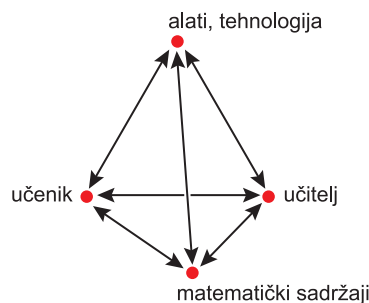
Spajanjem dvaju spomenutih trokuta dobivamo didaktički četverokut kao na slici 3. Veza učenik-matematički sadržaji zajednička je u oba trokuta i ona čini dijagonalu novonastalog četverokuta.



Slika 3. Didaktički četverokut

No, model četverokuta ne opisuje dovoljno dobro odnose između svih vrhova četverokuta jer u nastavnom procesu postoji i veza učitelja s tehnologijom. To je vrlo važan odnos jer su nastavnici ti koji odlučuju koje aktivnosti i alati će se koristiti za formalno učenje. Iz iskustva znamo i da je uglavnom usmjerenost učitelja na tehnologiju pretpostavka da će i učenik koristiti tehnologiju za učenje matematike. Stoga nedostaje još jedna dijagonala u četverokutu. Ovi kompleksni odnosi sugeriraju da je bolje ovu ideju prikazati na trodimenzionalnom modelu **tetraedra** koji prikazuje različite aktivnosti s tehnologijom u novom obliku (Rezat,

2006.). Model didaktičkog tetraedra uobičajen je u metodici nastave matematike za prikazivanje odnosa učenik-učitelj-matematika-tehnologija (slika 4).



Slika 4. Didaktički tetraedar

Uobičajeno je da se didaktički tetraedar crta tako da mu bazu čine vrhovi osnovnog didaktičkog trokuta učenik-učitelj-matematički sadržaji. Četvrti vrh tetraedra odnosi se na tehnologiju, ali i na upotrebu svih ostalih artefakata poput udžbenika, konkretnih pomagala i sl. Svaka od triju bočnih strana tetraedra prikazuje različiti aspekt upotrebe alata i tehnologije u odnosu na učenika, učitelja i matematiku. Zanimljivo je primijetiti da je model didaktičkog tetraedra najbolje opisan i istražen upravo u metodici matematike (Rezat i Strässer, 2012.). To samo pokazuje koliko su alati, udžbenici i IKT važni u nastavi matematike, tj. u usvajanju matematičkih koncepta.

Socio-didaktički tetraedar

Model didaktičkog tetraedra sadrži vrhove učenik, učitelj, matematika i tehnologija. No, rad u školi pretpostavlja rad s ljudima i tu je neizbježna socijalna komponenta učenja i poučavanja. Primjerice, upitamo li danas nastavnike u Hrvatskoj što im je najteže u njihovom poslu, sigurno će na prvo mjesto, ispred matematike i poučavanja, isplivati teškoće oko discipline, odgoja, komunikacije s učenicima i roditeljima, zatim ravnatelj i zbornica, plaće, institucija, problematika školskog sustava, odnos države prema obrazovanju, odnos društva prema matematici i sl. Ovi socijalni aspekti su također neraskidivi dio nastavničke profesije.

Upravo se odsutnost socijalnih i institucionalnih aspekata smatra glavnim nedostatkom didaktičkog

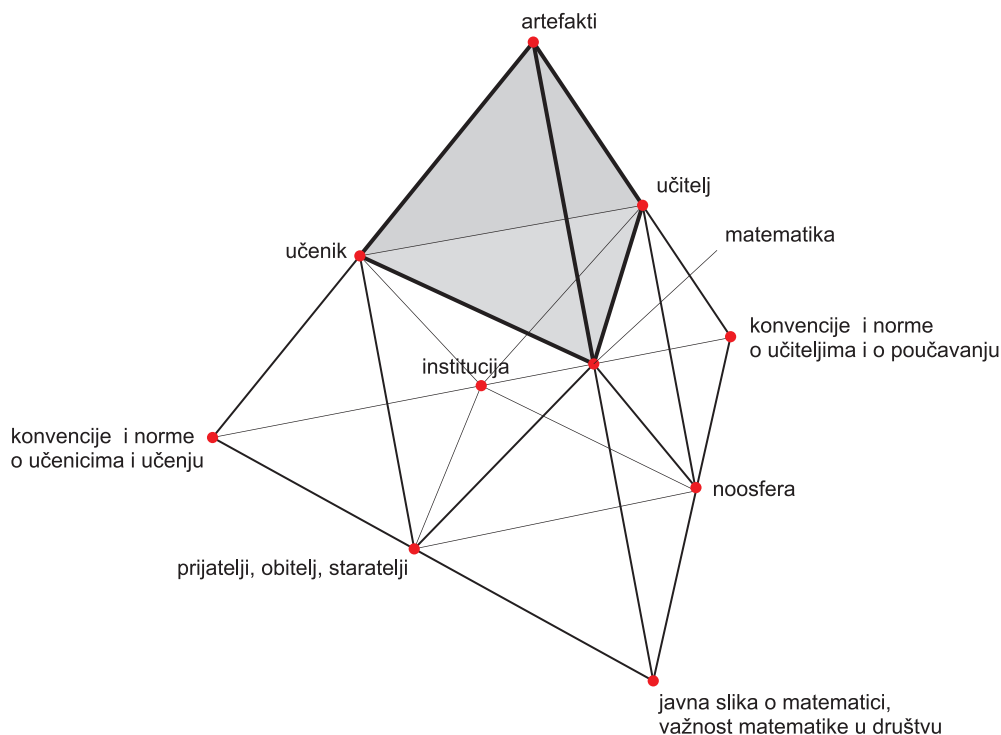
tetraedra opisanog u prethodnom poglavlju. Naime, ti društveni aspekti itekako utječu na uspješnost aktivnosti u razredu i na postignuća učenika. Nastava se ne izvodi u sterilnim uvjetima u kojima nema drugih parametara osim matematičkih sadržaja ili aktivnosti. Nastavnici i učenici su također članovi društva i lokalnih zajednica sa svojim normama i ulogama unutar škole kao institucije. Stoga je Engeström u svoj model *activity theory* uvrstio i društvene aspekte (Engeström, 1998.). Naslanjajući se na to, Rezat i Strässer (2012.) su proširili poznati model didaktičkog tetraedra i uveli model tzv. **socio-didaktičkog tetraedra**. U njemu su društvene i institucionalne aspekte učenja i poučavanja stavili na “dno” tetraedra, kao što je prikazano na slici 5.

Primijetimo da obojeni “vrh” socio-didaktičkog tetraedra sa slike 5 zapravo čini prvobitni didaktički tetraedar učenik-učitelj-matematika-tehnologija. “Donji” neobojeni dio tetraedra odnosi se na društvenu dimenziju nastave matematike. S obzirom na to da ova važna dimenzija u metodikama dugo nije uzimana u obzir, naziva se i “skrivena dimenzija”

ili “manje vidljivi aspekti aktivnosti”, poput normi i pravila, društva i zajednice, organizacije i podjele rada (Engeström, 1998.). No, ona je vrlo moćna i važna. Socio-didaktički tetraedar možemo usporediti sa santom leda kojoj iz vode viri samo “vrh”, tj. početni didaktički tetraedar, dok je donji društveni dio ostao ispod vode. Ovo je dobra usporedba jer u matematičkim aktivnostima, motivaciji za matematiku, ali i neuspjehu iz matematike redovito participiraju i društveni uzroci kojih sudionici često nisu svjesni.

Primjer: Računalo u nastavi matematike

Svaka od bočnih strana socio-didaktičkog tetraedra prikazuje različiti aspekt nastave matematike zajedno sa svojom društvenom i institucionalnom pozadinom. Primjerice, pogledajmo stranu s vrhovima: javna slika o matematici, konvencije i norme o poučavanju, artefakti. Na toj strani istaknute su i točke: matematika, učitelj, noosfera. Noosfera



Slika 5: Socio-didaktički tetraedar (Izvor: Rezat i Strässer, 2012, str. 648)

[nusfera] obuhvaća sve osobe i institucije koje odlučuju o ili sudjeluju u učenju i poučavanju matematike, poput donosioca kurikula, autora udžbenika, drugih nastavnika, strukovnih društava i časopisa, matematičkih aktiva, metodičara i sl. (Chevallard, 1982.). Osnovni trokut na toj strani tetraedra čine vrhovi matematika, nastavnik i artefakti. Ta strana opisuje korištenje npr. računala od strane nastavnika. Učitelji prilikom pripreme za nastavu promišljaju o propisanim ili predviđenim aktivnostima, mogućnosti realizacije tih aktivnosti na računalu. Na taj način nastavnik posreduje u aktivnostima između učenika i računala. Objekt aktivnosti je određena matematička ideja koja se treba usvojiti. Pri donošenju odluke nastavniku može pomoći noosfera, tj. komunikacija s drugim nastavnicima, razmjena iskustava, aktivnosti koje nude strukovne organizacije i sl. Konvencije i norme o tome što znači biti nastavnik u određenom društvu sigurno će utjecati na strukturu i organizaciju sata, kako će izgledati završni dio sata i sl. Važnost koju matematika ima u određenom društvu također će se, svjesno ili nesvjesno odražavati u stavu i ophođenju nastavnika.

Zaključak

U naslovu ovog teksta postavilo se pitanje kamo ide i u što se razvio model didaktičkog trokuta učenik-učitelj-matematički sadržaji. Neizostavan zahtjev za korištenjem tehnologije i zornosti u nastavi matematike rezultirao je proširenjem modela didaktičkog trokuta prvo do didaktičkog tetraedra. Nadalje, model didaktičkog tetraedra proširen je neizostavnim društvenim aspektima vezanim uz učenje i poučavanje (matematike). Tako je dobiven tzv. socio-didaktički tetraedar (Rezat i Strässer, 2012.). Radi se o vrlo složenom modelu koji pomaže boljem razumijevanju odnosa između sudionika i društvenih faktora važnih u matematičkom obrazovanju.

Tvorci ideje socio-didaktičkog trokuta smatraju da i ovaj model ima svojih ograničenja (Rezat i Strässer, 2012.). Ipak, on je važan za bolje shvaćanje parametara u procesu matematičkog obrazovanja. Također, to je važan model za metodiku matematike kao znanstvenu disciplinu jer se može uzeti kao

osnova za razumijevanje i opisivanje različitih situacija iz razreda.

Osim toga, zanimljivo je promatrati razvoj modela od jednostavnog trokuta do vrlo složenog socio-didaktičkog tetraedra. Taj razvoj se kroz vrijeme događao paralelno s razvojem didaktike i metodika i na njemu možemo lijepo pratiti na što su se autori fokusirali vezano uz teorijsku podlogu matematičkog poučavanja. Sigurno će se taj razvoj nastaviti i dalje.

LITERATURA

- 1/ G. Brousseau: *Theory of didactical situations in mathematics*, Kluwer Academics Publishers, Dordrecht, 1997.
- 2/ Y. Chevallard: Pourquoi la transposition didactique? *Seminar in Didactics and Pedagogy of Mathematics* (1982.), pp. 167–194, IMAG, University of Grenoble.
- 3/ Y. Engeström: Reorganizing the motivational sphere of classroom culture: an activity-theoretical analysis of planning in teacher team. Izašlo u: F. Seeger, J. Voigt, & U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (1998.), pp. 76–103, Cambridge University Press, Cambridge.
- 4/ V. Poljak: *Didaktika*, Školska knjiga, Zagreb, 1970.
- 5/ S. Rezat: A model of textbook use. Izašlo u: J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N.A. Stehliková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (2006.), Vol. 4, pp. 409–416. Charles University, Faculty of Education, Prag.
- 6/ S. Rezat, R. Strässer: From the didactical triangle to the socio-didactical tetrahedron: artifacts as fundamental constituents of the didactical situation, *ZDM – The International Journal on Mathematics Education* (2012.), Vol. 44, No. 5, pp. 641–651.
- 7/ A. Schoenfeld: Problematising the didactic triangle. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education* (2012.), Vol. 44, pp. 587–599.
- 8/ M. W. Wartofsky: Models – representation and the scientific understanding, *Boston Studies in the Philosophy of Science* (1979.), Vol. 48., Reidel, Dordrecht.
- 9/ J. V. Wertsch: *Mind as action*, Oxford University Press, New York, 1998.