

Origami: otkrivanje Pitagorina poučka u kutiji

Ana Kuzle, Potsdam, Njemačka

U ovom članku predstaviti ću "Otkrivanje Pitagorina poučka u kutiji", matematički zadatak primjeren za nastavu geometrije u višim razredima osnovne škole i/ili nižim razredima srednje škole. Centralne matematičke ideje ovog zadatka su obujam kvadratne prizme i Pitagorin poučak. Međutim, problematika se može proširiti na druga matematička područja – posebice na područje vezano uz proporcije sa ili bez korištenja novih medija.



Motivacija za zadatak

Matematički zadatak *Otkrivanje Pitagorina poučka u kutiji* ilustrira kako jednostavna upotreba papira kvadratnog oblika postaje nezamjenjiv alat za rješavanje problema, za povezivanje matematičkih ideja, te za poticanje razvoja procesnih kompetencija u nastavi matematike. To je prilagođena i proširena verzija zadatka autora Kleine i Richter (2013.).

Origami je japanska umjetnost savijanja papira u kojoj se individualni dijelovi povezuju u jednu cjelinu te mogu tvoriti zamršene uzorke. U sljedećem primjeru savijanjem papira kvadratnog ob-

lika oblikovat ćemo otvorenu kutiju koja sadržava pregršt matematičkih iznenađenja za učenike, studente i učitelje. Ovakav nastavni sat može potaknuti učenike na istraživanje veze između duljine stranice papira i obujma izrađene kutije. Osnovni matematički koncepti u ovom primjeru obuhvaćaju računanje obujma uglatih tijela, promišljanje o proporcijama, Pitagorin poučak te rad s matematičkim izrazima. Primjena raznih metoda problemskog rješavanja zadataka, poput metode unaprijed i unatrag, načela razlaganja i nadopunjavanja, načela simetrije, prepoznavanja uzoraka ili upotrebe jednadžbi, dio su iskustvenog učenja. Dakle, prethodno navedeni zadatak uključuje rješavanje problema s pomoću vizualizacije geometrije i algebre.

Opis zadatka

Učenicima devetog razreda (15 godina) srednje škole¹ postavljen je sljedeći matematički zadatak (vidi sliku 1). Pritom su papiri formata A4 (210 mm×297 mm) bili izrezani u kvadratni oblik (dimenzije 210 mm×210 mm) i podijeljeni učenicima. Dio njihove domaće zadaće bio je napraviti kutiju od papira kvadratnog oblika. Uputstva se nalaze u prilogu. Ostali zadatci rješavani su na satu, što se vidi na slici 2.

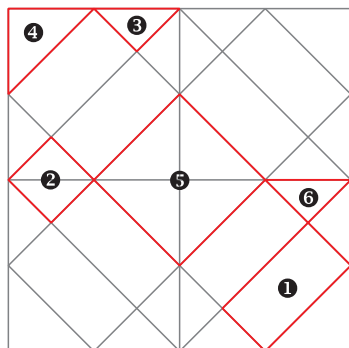
Središnji problem (zadatak e) bio je izvesti formulu za obujam otvorene kutije kada je varijabla a duljina stanice origami papira. Prethodni zadatci postupno navode učenike prema središnjem problemu istovremeno uključujući razne zadatke poput procjene obujma kutije, zatim izračuna obujma kutije upotrebljavajući matematički pribor te promišljanja o odnosima među likovima nakon razmatanja kutije. Prva aktivnost (zadatak c) služi za razvoj učenikove sposobnosti procjene te rekapitulaciji znanja o izračunu obujma kvadratne prizme. Sljedeća aktivnost (zadatak d) osmišljena je s ci-

Origami: Matematika u kutiji

Origami je umjetnost savijanja papira. Savijanjem papira kvadratnog oblika možemo dobiti raznolike dvodimenzionalne ili trodimenzionalne oblike (npr. geometrijska tijela, ždralovi). Danas ćete naučiti kako od lista papira oblika kvadrata sastaviti otvorenu kutiju koju ćemo nakon toga pažljivo promotriti posvetivši pozornost novonastalim likovima i međusobnim odnosima na temelju novonastale mreže uzoraka.



- Napravite origami kutiju od kvadratnog papira (pogledajte uputstva u prilogu ili videouradak s uputama na <https://www.youtube.com/watch?v=TFt14rd.Llw>).
- Označite različitim bojama duljinu, širinu i visinu otvorene kutije.
- Koliko iznosi obujam ove kutije? Prvo procijenite obujam, a zatim izmjerite bridove kutije i izračunajte obujam otvorene kutije.



procjena	izračun
$V =$	$V =$

- Razmotajte kutiju i promotrite mrežu uzoraka te dužinu, širinu i visinu.

Odgovorite na sljedeća pitanja:

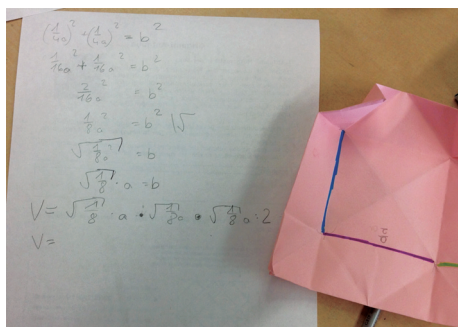
Površina

- pravokutnika 1 jednaka je _____ površini trokuta 4.
- trokuta 3 jednaka je _____ površine kvadrata 2.
- pravokutnika 1 jednaka je _____ površini kvadrata 5.
- kvadrata 2 jednaka je _____ površini trokuta 4.
- kvadrata 5 jednaka je _____ površini trokuta 6.

- Izvedite formulu za obujam otvorene kutije u slučaju kada varijabla a predstavlja duljinu stranice kvadratnog papira za origami.

Slika 1. Nastavni listić

¹ Deveti razred srednje škole otprilike odgovara prvom razredu srednje škole u RH.



Slika 2. Primjer rada jednog učenika tijekom rješavanja središnjeg problema

lijem sustavne analize nastalog uzorka što također pomaže u rješavanju središnjeg problema (zadatak e).

Cilj zadatka

Zadani zadatak imao je tri cilja – produbljivanje matematičkog razumijevanja, povezivanje u matematici i rješavanje problemskog zadatka. S obzirom na sadržaje sposobnosti, u procesu razmatanja kutije, učenici proširuju matematičko znanje na nekoliko načina. Za početak, oslanjaju se na znanja o uglatim tijelima i o povezivanju mjera za dužinu, površinu i obujam u odnosu na rad sa standardnim i nestandardnim mjernim jedinicama. Osim toga, potrebno je naglasiti i važnost zaključivanja o proporcijama. Na samom početku papir kvadratnog oblika imao je jednodimenzionalnu (linearnu) vrijednost. Kako se papir presavija, mijenjaju se njegove proporcije, ali zadržavaju specifične karakteristike. Primjerice, uviđamo dvije stvari: baza kutije je kvadrat, a vrijednost visine kutije jednaka je polovini duljine stranice kvadratne baze. Spomenuta dva podatka od velike su važnosti za naredno promišljanje o problemu. Ili iz drukčije perspektive, obujam kutije se povećava za faktor osam, kada se sve linearne duljine udvostruče. To omogućava učenicima produbljivanje i povezivanje matematičkog znanja o proporcijama između jednodimenzionalnih i trodimenzionalnih mjera. Nadalje, definiranje formule za otvorenu kutiju zahtijeva preispitivanje prethodnog znanja o pravim kutovima – posebice primjena Pitagorina poučka. Naposljetku, važan aspekt rada je i baratanje matematičkim

izrazima i kvadratnim korijenima. S obzirom na procesne sposobnosti, zadatak stimulira nekoliko mentalnih procesa. Prvo, u procesu razmatavanja kutije, učenici zamjećuju da je čitav komad papira prekriven različitim likovima (jednakokračni pravokutni trokuti, kvadrati, pravokutnici...) u dijagonalnom uzorku. Promatrajući uzorke i likove na razmotanom papiru, učenici mogu zamijetiti povezanost između duljine stranice papira i duljine visine otvorene kutije. Pritom se učenici koriste metodama unaprijed i unatrag te načelom razlaganja i nadopunjavanja. Drugo, načelo simetrije može potpomoći u rješavanju problema jer je uzorak simetričan što se može vidjeti već u procesu savijanja papira. I posljednje, rješavanje jednadžbi i baratanje izrazima dovodi do rješavanja zadatka. Integriranje problemskog razmišljanja i vizualizacija geometrije i algebre čini ovu aktivnost dragocjenom za učenike na nekoliko razina.

Primjeri učeničkih metoda problemskog rješavanja zadatka s pripadajućim interpretacijama

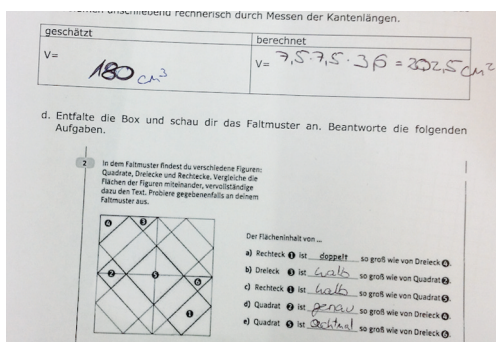
Nakon izrade i razmatavanja kutije, većina učenika primjećuje da je papir prekriven raznovrsnim likovima (manji i veći kvadrati, pravokutnici, manji i veći jednakokračni pravokutni trokuti). Učenici otkrivaju odnose među likovima: mali trokut je polovina kvadrata, pravokutnik čini pola velikog kvadrata, mali kvadrat i veći jednakokračan pravokutan trokut imaju jednaku površinu, a mali trokut čini osminu površine velikog kvadrata (vidi sliku 3). Nakon završetka rada, učenici su pred razredom prezentirali svoja rješenja koja su se jako razlikovala. Nekoliko tipičnih rješenja, u kojima su učenici primijenili različite pristupe rješavanja problema, navedena su u sljedećim stavcima.

Skupine učenika koje su se oslanjale na direktno mjerenje bile su ograničene nepreciznošću matematičkog pribora (npr. ravnalo, kutomjer), no uspjeli su dobiti približne mjere. Na primjer, Timo (vidi sliku 3) nije uspio definirati formulu za obujam $V(a)$ otvorene kutije. Umjesto toga, do rješenja je došao

mjenjem, ne koristeći se algebarskom računicom i Pitagorinim poučkom. Dobio je da su duljine stranica pobočaka kutije 7.5 cm i 3.6 cm, a iz toga relativno ispravnu vrijednost obujma 202.5 cm^3 , umjesto 204.64 cm^3 .

Površina:

- pravokutnika 1 jednaka je dvostrukoj površini trokuta 4.
- trokuta 3 jednaka je polovini površine kvadrata 2.
- pravokutnika 1 jednaka je polovini površine kvadrata 5.
- kvadrata 2 jednaka je površini trokuta 4.
- kvadrata 5 jednaka je površini osam trokuta 6.



Slika 3. Timovo rješenje, 9. razred srednje škole, 15 godina

Većina učenika poput Jana (vidi sliku 4), ustvrdila je da duljina stranice kvadrata u sredini (kvadrat 5 na slici 4) odgovara $1/4$ dijagonale papira, a duljina stranice malog kvadrata (kvadrat 2 na slici 4) $1/8$ dijagonale papira. Pritom se koristio načelom simetrije. Stoga je Jan zaključio da je vrijednost obujma kutije jednaka

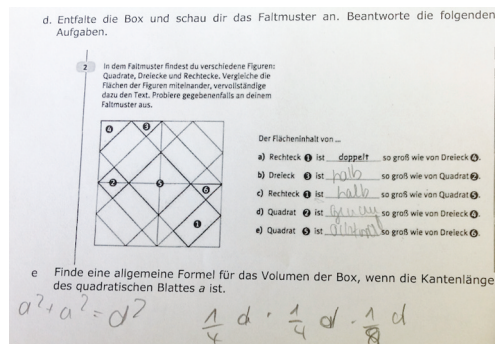
$$V = l \cdot w \cdot h,$$

gdje su dimenzije

$$\left(\frac{1}{4}d\right) \cdot \left(\frac{1}{4}d\right) \cdot \left(\frac{1}{8}d\right),$$

a varijabla d je duljina dijagonale kvadratnog papira.

Jan je potom pokušavao naći povezanost između dijagonale papira i stranice a polaznog kvadratnog papira koristeći se pritom metodom unaprijed i unatrag. Koristeći se poznavanjem Pitagorina poučka, približio je da zbroj kvadrata stranice duljine a odgovara kvadratu duljine dijagonale. Bilo kako bilo, nije do kraja slijedio tu ideju.



Slika 4. Janovo rješenje, 9. razred srednje škole, 15 godina

Bernd je (vidi sliku 5), nasuprot tome, povezao duljinu dijagonale d (varijabla d je duljina stranice srednjeg kvadrata kvadratnog papira, a ne duljina dijagonale originalnog kvadratnog papira) sa stranicom polaznog kvadratnog papira a i primijenio Pitagorin poučak. Dobio je sljedeće

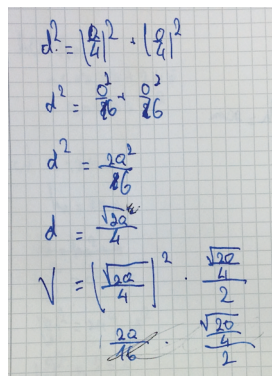
$$d^2 = \frac{2a^2}{16},$$

ali je pogriješio prilikom izračuna dijagonale d dobivši da je $d = \frac{\sqrt{2}a}{4}$, umjesto $d = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Isto tako, primijetio je da je obujam kutije

$$V = l \cdot w \cdot h,$$

gdje su dimenzije

$$d \cdot d \cdot \left(\frac{1}{2}d\right),$$



Slika 5. Berndovo rješenje, 9. razred srednje škole, 15 godina

a d duljina stranice kvadrata u sredini kvadratnog papira. Prema Berndu, stranica kvadrata u sredini kvadratnog papira je $\frac{\sqrt{2}a}{4}$. Tu vrijednost uvrstio je u općenitu formulu za obujam te polovicu vrijednosti $\frac{\sqrt{2}a}{4}$ za visinu kako bi došao do formule za obujam otvorene kutije. Međutim, nije pojednostavnio izraz niti uvidio da je pogriješio kod duljine dijagonale d . Dakle, točno je analizirao odnose među likovima koristeći se pritom načelom simetrije i shvatio da mora upotrijebiti Pitagorin poučak, ali je pogriješio pri računanju.

Lara je (vidi sliku 6) koristila sličan pristup kao Bernd, označivši stranicu kvadrata u sredini sa b . Koristeći se Pitagorinim poučkom, dobila je duljinu stranice kvadrata u sredini jednaku $\sqrt{\frac{1}{8}}a$. Tada je zamijenila duljinu i širinu kutije sa $\sqrt{\frac{1}{8}}a$, a visinu sa $\frac{1}{2\sqrt{8}}a$ kako bi došla do formule

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{64},$$

gdje je a duljina stranice polaznog kvadratnog papira. Prilikom rješavanja Lara je upotrijebila načelo simetrije, metodu unaprijed, te rješavanje jednadžbi i baratanje izrazima kako bi pojednostavnila i na kraju riješila problem.

Slika 6. Larino rješenje, 9. razred srednje škole, 15 godina

Međutim, jedna jednostavna, elegantna metoda učenicima nije pala na pamet. Trebalo je uočiti da pregibi dijele papir na 8 pravokutnika (koji su sačinjeni od dva mala kvadrata), 4 velika trokuta (koji su jednaki 4 mala kvadrata), 1 veliki kvadrat (koji se sastoji od 4 mala kvadrata), 8 malih trokuta (koji su polovina kvadrata) i 4 mala kvadrata. Odatle vidimo da pregibi dijele papir na 32 mala kvadrata. Svaki kvadrat tada ima površinu od $1/32$ površine cijelog papira ili $\frac{1}{32}a^2$, gdje je a duljina stranice polaznog kvadratnog papira. Stoga je duljina stranice kvadrata $\sqrt{\frac{a^2}{32}} = \frac{a}{4\sqrt{2}}$.

Duljina stranice kvadrata je visina kutije, tj. $\frac{a}{4\sqrt{2}}$, dok je duljina i širina kutije dvostruka visina kutije, tj. $\frac{a}{2\sqrt{2}}$. Iz toga slijedi da je obujam:

$$V = l \cdot w \cdot h,$$

$$V = \left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{a}{4\sqrt{2}}\right)$$

$$V = \frac{a^3}{32\sqrt{2}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{64}.$$

Usporedivši rješenje s rješenjima učenika, poznavanje Pitagorina poučka prilikom rješavanja zadatka ovim postupkom nije bilo nužno. Ono što se tražilo bilo je poimanje veličina i odnosa među različitim likovima. Dakle, zadatak je pristupačan i prije negoli se u nastavi geometrije obradi Pitagorin poučak.

Ukratko, zadatak potiče daljnji razvoj različitih sadržajnih i procesnih sposobnosti te njihovo povezivanje. Prilikom rješavanja zadatka, učenici su prepoznavali različite likove, uviđali veze među njima te otkrivali njihova nova svojstva. Kroz savijanje papira i pojave simetričnih uzoraka, bili su u mogućnosti donositi zaključke o duljini, širini i visini origami kutije. Prilikom rješavanja zadatka također je vidljiva kombinacija različitih metoda rješavanja problema poput metode unaprijed i unatrag, načela razlaganja i nadopunjavanja, načela simetrije, prepoznavanja uzoraka ili upotrebe jednadžbi. Kako bi se došlo do konačnog rješenja, upotreba načela razlaganja i nadopunjavanja je centralna; primjerice dva mala trokuta pripojena velikom trokutu ili

obrnuto čine kvadrat koji se može rastaviti na dva pravokutnika. Na kraju je važno pripomenuti, da je rješavanje jednadžbi i suvereno baratiranje izrazima bitno za uspješno rješavanje zadatka.

Didaktička analiza zadatka

Traženo predznanje za rješavanje zadatka obuhvaća tri sadržajna standarda: geometriju, mjerenje i algebru. Predznanje iz geometrije uključuje poznavanje geometrijskih likova i njihovih međusobnih odnosa (pravokutni trokuti, kvadrati, pravokutnici) kao i poznavanje i primjenu Pitagorina poučka. Nadalje, važno je i predznanje mjerenja koje podrazumijeva rad s različitim mjernim jedinicama, procjenu obujma kvadratne prizme te vještinu korištenja pribora (ravnilo ili dva trokuta) i formula pri definiranju mjera jednodimenzionalnog ili dvodimenzionalnog lika. Posljednje, predznanje algebre odnosi se na prepoznavanje i formaliziranje uzoraka kroz matematičke izraze i jednadžbe te baratiranje kvadratnim korijenima. Usto, učenici trebaju slijediti uputstva savijanja i pravilno složiti kutiju. Uzevši u obzir sve navedeno, zadatak odgovara učenicima 8. razreda osnovne škole nadalje.

Neke od odgojno-obrazovnih zadaća podrazumijevaju:

- korištenje formule za obujam prizme kod izvođenja formule za obujam otvorene kutije sa stranicom a
- primjena Pitagorina poučka pri izračunu duljine stranice a koristeći se duljinom poznate stranice jednakokračnog pravokutnog trokuta
- uviđanje veze među likovima i njihovim veličinama
- primjena metode unaprijed i unatrag kod danih i traženih veličina
- upotreba načela razlaganja i nadopunjavanja gdje dva mala trokuta zajedno s velikim trokutom ili obrnuto čine kvadrat koji se može rastaviti na dva pravokutnika.

Pri prethodno predstavljenim zadaćama, učenici mogu naići na nekoliko prepreka. Za kraj ću reći nešto o njima i ponuditi načine nadilaženja tih prepreka. Zadaci a) – d) učenicima nisu predstavljali

problem. Učenici su bili u mogućnosti individualno ih riješiti i rješenje raspraviti u skupini. Najveći izazov predstavljao je zadatak e) gdje se tražio izvod formule za obujam otvorene kutije $V(a)$. Prvo, zadatak se oslanja na promatranje i formaliziranje promotrenih uzoraka. Također, nepravilno ili neprecizno savijanje papira dovodi do krivih zaključaka. Taj problem može se izbjeći upotrebom odgovarajućeg papira i naglašavanjem preciznosti pri izradi kutije. Kako bi odredili formulu za obujam kutije, učenici moraju prvo odrediti dužinu, širinu i visinu kutije, a tome pripomaže prethodno označavanje tih triju mjera na razmotanoj kutiji. Ovo je prvi korak povezivanja pregiba i matematičkih svojstava. Drugo, prepoznavanje odnosa među likovima nije svima jednostavno i lako. Taj problem može se zaobići sistemskom analizom uzoraka i raspravom u skupini. Primjerice, zajedničkim opažanjem i raspravom kako je kutija sastavljena, učenici mogu primijetiti da je dužina kutije dvostruko dulja od visine kutije. Treće, različite kooperativne nastavne metode poput rasprave u paru i izlaganje ideja također pomažu pri prevladanju poteškoća.

Zaključak

Zadatak s origamijem zainteresirao je učenike. Većina njih uživala je slijedeći videouputstva kod izrade kutije. Slijedeća aktivnost pronalaženja formule za obujam otvorene kutije bila je izazov, no učenici su shvatili vrijednost povezivanja raznolikih matematičkih ideja iz geometrije i algebre kako bi riješili problem iz stvarnog života.

O punom potencijalu aktivnosti nismo raspravljali. Vrijedne dodatne aktivnosti mogle bi biti mijenjanje zavisne varijable, crtanje grafa funkcijske ovisnosti, te sastavljanje kutija različitih dimenzija što bi omogućilo učenicima da promišljaju o omjerima i veličinama. Konkretno, postavljanje pitanja u nastavi kao što su: "Što će se dogoditi ako...?", "Možeš li predvidjeti..." pomoći će otvoriti problem, postići daljnje proporcionalno razumijevanje i pritom još više potaknuti učenike. Uživajte zajedno sa svojim učenicima (studentima, učiteljima) istražujući matematiku koja se skriva u kutiji, ali i otkriva zajedno s njezinim razmotavanjem!

LITERATURA

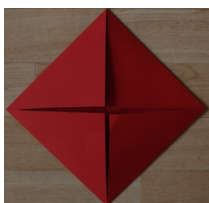
1/ M. Kleine, S. Richter (2013.): *Math. Origami*, C.C. Buchners Verlag, Bamberg.

Dodatak: Otvorena kutija – upute za sastavljanje

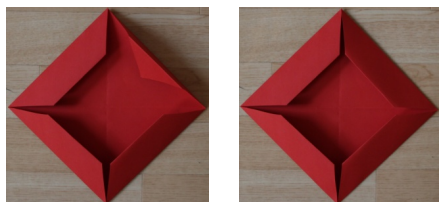
1. Okomito presavijmo kvadrat napola pa razmotajmo. Nakon toga presavijmo kvadrat vodoravno pa razmotajmo.



2. Presavijmo svaki vrh papira prema središtu.



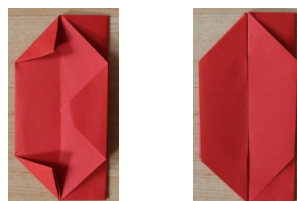
3. Svaki od vrhova blizu središta podsavijmo prema unutra na način da dodiruju polovište odgovarajuće stranice kvadrata.



4. Okrenimo papir. Savijmo prema unutra lijevu i desnu stranu kako bi se sastale na sredini.



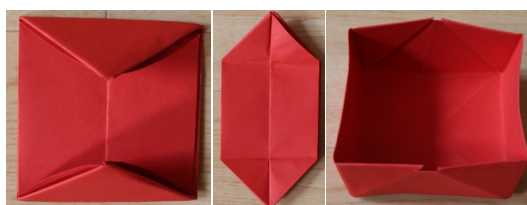
5. Lijevi preklop presavijmo na desnu stranu. Nakon toga presavijmo male trokute pri dnu i vrhu lijeve strane prema sredini. Vratimo lijevi preklop natrag na mjesto.



6. Ponovimo korak 5, ovaj put s desnim preklom kako bismo dobili oblik sa slike.



7. Presavijmo vrhove horizontalno pa vratimo natrag. Polako razmotavajmo kutiju oblikujući dno kutije i njene strane.



S engleskog prevela: Lucija Stepanić