

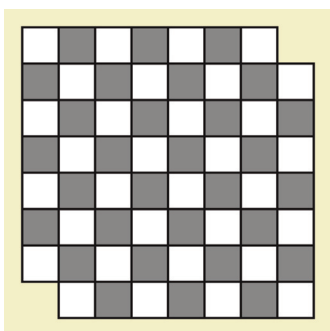
# Polimino

Branimir Dakić, Zagreb

U Miš-u broj 62 pisali smo o matematičkim igračkama. Uglavnom je bila riječ o raznim slagalicama: tangramu, Arhimedovom stomakionu te poliminu. U ovom broju zadržat ćemo se još malo na poliminu.

Kao što to često biva, neki jednostavan problem potakne interes matematičara pa se tema dopunjuje i produbljuje te se tako ponekad razvije u pravu malu matematičku disciplinu. Jedan takav primjer je i sljedeći problemčić:

*Može li se krnja šahovska ploča, ploča bez dvaju polja na dijagonalno suprotnim vrhovima, potpuno pokriti domino-pločicama?*



Slika 1.

Napomenimo da pod domino-pločicom podrazumijevamo pravokutnu pločicu koja se sastoji od dvaju kvadrata sukladnih onima na šahovskoj ploči.

Rješenje problema je sasvim jednostavno, ali i vrlo domišljato. Svaka domino-pločica pokriva dva susjedna polja šahovnice, jedno bijelo i jedno crno. Tako bi u svakom slučaju broj pokrivenih crnih i broj pokrivenih bijelih polja bio jednak. A kako je bijelih polja na krnjoj šahovnici više, onda potpuno pokrivanje te ploče dominama nije izvedivo.

Ovaj zgodan zadatak poslužio je matematičaru Solomonu Wolfu Golombu kao uvod u članak pod

naslovom *Checker Boards and Polyominoes* koji je objavljen u uglednom i popularnom časopisu *American Mathematical Monthly* 1954. godine. Godinu dana ranije Golomb, tada 21-godišnji student Sveučilišta Harvard, održao je u harvardskom matematičkom klubu predavanje o jednoj posebnoj vrsti geometrijskih objekata u ravnini koje je nazvao *polimini*. Problem s pokrivanjem krnje šahovnice domino-pločicama inspirirao ga je na razmatranje o pločicama općenitijim od domina koje se sastoje od triju i više sukladnih kvadratića te popločenjima takvim pločicama.

Tako primjerice tromino-pločica, koje su složene od triju kvadratića, ima ukupno dvije (slika 2).



Slika 2.

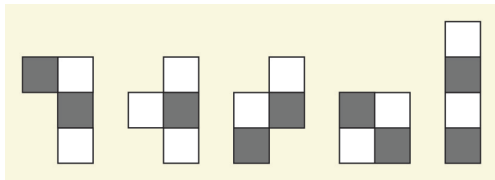
Tetramino-pločica je pet (slika 3). Tromino i tetramino-pločicama ne može se popločiti pravokutnik tako da nema preklapanja i nema "rupa" i da je k tome uporabljena točno jedna pločica od svake vrste. Za tromino je to očito. Kako bismo dokazali da



Slika 3.

je tvrdnja točna i za tetramino, slijedit ćemo slično razmišljanje onome s krnjom šahovnicom.

Obojit ćemo kvadratiće tetramina dvjema bojama, bijelom i crnom, tako da dva kvadratića koja imaju zajedničku stranicu budu obojena različitim bojama. Dobit ćemo tako devet kvadratića jedne i 11 kvadratića druge boje.

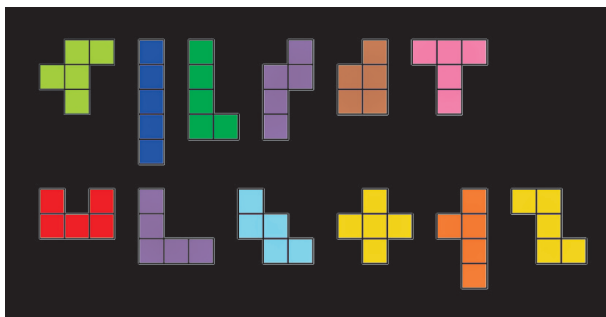


Slika 4.

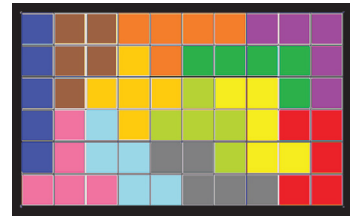
Ako pak uzmemo bilo koji pravokutnik  $4 \times 5$  na šahovskoj ploči, on će imati jednak broj bijelih i crnih polja i ne možemo ga pokriti tetramino-pločicama. O pravokutnicima  $1 \times 20$  i  $2 \times 10$  ne treba trošiti riječi.

Broj pločica pentamina je 12 (slika 4.) i one su složene od po pet kvadratića. Valja primijetiti da su neke pločice simetrične, a neke nisu. Međutim dvije pločice od kojih se jedna dobije premetanjem druge u prostoru ne smatraju se različitim.

Svih 12 pločica pentamina imaju ukupno  $12 \cdot 5 = 60$  kvadratića što znači da bismo njima možda mogli pokriti pravokutnike dimenzija  $6 \times 10$ ,  $5 \times 12$ ,  $4 \times 15$  i  $3 \times 20$ . I uistinu svako od takvih popločenja je moguće, samo su različiti brojevi provedbi.



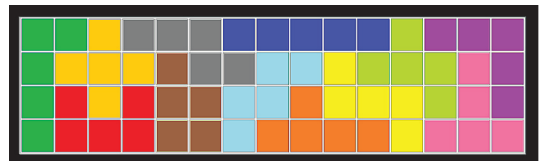
Slika 5.



Slika 6.



Slika 7.



Slika 8.

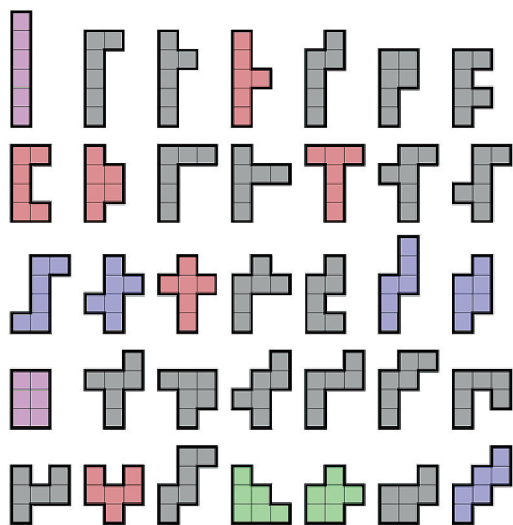


Slika 9.

Na slici 6 vidimo pentamino-pločice složene u pravokutnik  $6 \times 10$ . Takav pravokutnik možemo popuniti pentamino-pločicama na 2339 raznih načina.

Pravokutnik  $5 \times 12$  može se popuniti na 1010, pravokutnik  $4 \times 15$  na 368, pravokutnik  $3 \times 20$  na samo 2 načina. Od svake vrste po jedno rješenje vidimo na slikama 6, 7, 8 i 9.

Heksamino, polimino čija je svaka pločica složena od šest kvadratića, ima ukupno 35 pločica (slika 10). Očigledno, traganje za brojem svih mogućih popločenja pravokutnika heksamino-pločicama vrlo je zahtjevan posao. A što tek reći za još složenije pločice? Tako primjerice heptamino ima 108 pločica.



Slika 10.

Dodajmo još kako su slične "igrice" **Poliamond** i **Poliheks**. U prvoj su pločice oblikovane od jednakostraničnih trokuta, a u drugoj od pravilnih šesterokuta.

Kad je rečeno da je Golomb inspiraciju za svoj rad na poliminu pronašao u jednostavnim matematičkim zagonetkama, onda nije isključeno da je u tome negdje svoje prste imao i Henry Dudeney. U njegovoj vrlo popularnoj knjizi **The Canterbury Puzzles and Other Curious Problems** (iz 1907. godine) na stranici 90 pod rednim brojem 74 nalazimo sljedeću zanimljivu priču naslovljenu **Polomljena šahovska ploča**:

*Ovo je priča o princu Henryju, sinu Williama Osvajača, kasnije Henryju I., koja se toliko učestalo pojavljuje u starim zapisima da je nedvojbeno vjerodostojna. Sljedeća inačica opisa incidenta preuzeta je iz Haywardova djela "Život Williama Osvajača" objavljenog 1613.:*

*Pred sam kraj svoje vladavine imenuje svoje sinove Roberta i Henryja zajedničkim upraviteljima Normandije kako bi potisnuo naprasitost jednoga i lakoumnost drugoga.*

*Oni zajedno odoše posjetiti francuskog kralja koji je bio smješten u Constanzi gdje se vrijeme provodilo uz različite rasonode. Henry je igrao šah s Louisom,*

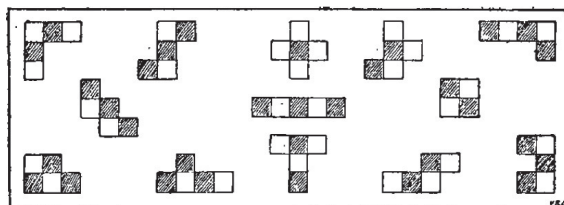


Slika 11.

*tada prijestolonasljednikom Francuske, i stalno ga je pobjeđivao.*

*Louis je postajao sve žešći na riječima što je naljutilo Henryja. Velika nesnošljivost jednoga i slaba suzdržanost drugoga razbuktale su vatru među njima toliko da je Louis bacio šahovske figure Henryju u lice. Henry je uzvratio udarivši Louisa šahovskom pločom, potekla je krv i bio bi poginuo da se nije umiješao njegov brat Robert. Obojica pohitaju konjima progonjeni od Francuza.*

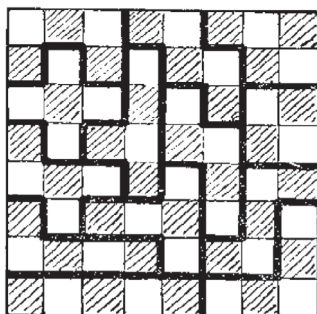
*Tradicija, koja u ovom primjeru baš i nije vjerodostojna, kaže da se šahovnica raspala na 13 komada kako se to vidi na crtežu. Od toga je 12 komada različitog oblika, a svaki sadrži pet kvadratića te je još jedan manji komad od četiri kvadrata.*



Slika 12.

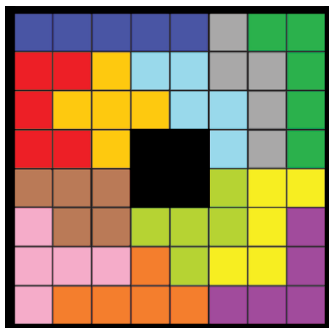
*Tako imamo sveukupno šezdesetčetiri kvadratića koliko i šahovnica a zagonetka nalaže izrezati ih i potom složiti tako da se dobije ispravna ploča. Komadi mogu biti lako izrezani od komada tvrdog "karirog" papira te će biti izvor trajne zabave.*

Na izvornoj slici (slika 12) prikazani su dijelovi na koje se raspala šahovnica. Na slici 13 je rješenje dano u Dudeneyjevoj knjizi.



Slika 13.

Dudeneyjeva knjiga potječe iz 1907. godine i to je vjerojatno najstarija objava ove teme. Primijetimo kako se u njegovom zadatku ploča raspala na 13 dijelova od kojih je 12 pentamino pločica i jedna pločica u obliku kvadrata složenog od četiriju malih kvadratića.



Slika 14.

Kasnije se pojavio zahtjev da se od komada na koje se raspala ploča složi kvadrat  $8 \times 8$  u čijem će središtu biti šupljina  $2 \times 2$ . Rješenje se pojavilo 1935. godine a tijekom vremena uz uporabu računala došlo se do potpunog rješenja – ukupno je moguće na 65 različitih načina s 12 pentamino pločica popločiti šahovnicu tako da u sredini bude spomenuta šupljina.



Slika 15.

Spomenimo ovdje još i **Tetris**, svojedobno možda i planetarno najpopularniju računalnu igricu, djelo Rusa Alekseja Pažitnova iz 1984. godine. Igrač tipkama na računalo usmjerava pločice koje mu se slučajno pojavljuju i padaju prema dolje u pravokutni prostor te tako popunjava taj prostor.

Primijetimo na kraju još i to da je internet krcat raznoraznim zanimljivostima vezanim uz polimine. Nevjerojatno je koliko su se neki ljudi posvetili ovoj igrački. Izdvojimo iz te skupine američkog fizičara Georgea Huttlina koji iz rasonode piše računalne programe za rješavanje matematičkih zagonetki. Posebice se bavi pentaminom pa je tako naslov njegove stranice na internetu ispisan na uistinu originalan način:

Huttlin je istražio na koliko se načina mogu slaganjem pentamino-pločica dobiti pojedina slova abecede. Podrobnije o tome možete vidjeti na <http://www.cs.brandeis.edu/~storer/JimPuzzles/PACK/Pentominoes/LINKS/PentominoesHuttlin.pdf>

Na naslovnici MiŠ-a vidimo manji izbor od 2339 spomenutih rješenja problema smještaja pentamino-pločica u pravokutnik  $6 \times 10$ . Taj izbor (ukupno 80 rješenja) proveden je na temelju zahtjeva da se odabranih 12 pločica pri slaganju ne smiju premetati u prostoru već se samo mogu pomicati po ravnini.

U Panoptikumu je pak mali zoološki vrt, niz sličica na kojima su neke životinje složene od pentamino pločica.



Slika 16.