

Fundamentalne ideje za nastavu geometrije

Dubravka Glasnović Gracin, Zagreb
Ana Kuzle, Potsdam

U MiŠ-u je u više navrata naglašena važnost geometrije u poučavanju te problem redukcije geometrijskih sadržaja u kurikulumu kroz posljednja desetljeća do danas. U ovom tekstu donosimo novu konceptualizaciju važnih geometrijskih ideja koje bi se, prema njemačkom metodičaru matematike Wittmannu, trebale svakako naći u matematičkim kurikulumima.



Uvod

Posljednjih se desetljeća u mnogim zemljama diljem svijeta primjećuje smanjenje udjela geometrijskih sadržaja u nacionalnim kurikulumima (vidi [1], [6], [7] i [8]). Uvid u literaturu ukazuje da su mnogi autori primijetili ovaj fenomen te se u tekstovima mogu naći vapaji poput "Ne zanemarimo poučavanje geometrije!" (vidi [13]) te briga da je geometrija u osnovnoj školi stekla reputaciju "problematičnog djeteta" unutar poučavanja matematike (vidi [1]). Jones (vidi [5]) kao razlog za smanjenje udjela geometrije navodi nastojanja da se u kurikule uvedu sadržaji ostalih, novijih, matematičkih disciplina poput algebre, statistike i vjerojatnosti. Uz to, u okvirima velikih međunarodnih studija poput PISA-e i TIMSS-a, udio zadataka iz geometrije je manji u odnosu na neke druge domene (vidi [9] i [12]).

Obzirom na to da ove međunarodne studije utječu na strukturu i zahtjeve mnogih nacionalnih kurikula, moguće je da su i one također utjecale na smanjenje geometrije u nastavnim programima.

Kurikul geometrije – problemi

Uz jednaku satnicu i uvođenje novih sadržaja jasno je da se nešto od starih tema treba reducirati. Tu se geometrija, kao vrlo stara disciplina u edukaciji matematike, očito našla na prvom udaru. Još jedan od razloga zašto se iz programa reduciraju baš geometrijski sadržaji vjerojatno leži u tome što geometrija ima tisućljetnu povijest poučavanja. S takvim imponzantnim stažem dogodilo se da je godinama diljem svijeta geometrijski kurikulum sadržavao šaroliku mješavinu aktivnosti (vidi [17]) o kojima se

s vremenom nije vodilo dovoljno računa u osuvremenjivanju. Stoga je, linijom manjeg otpora, lokalnim obrazovnim reformatorima (često i s manjkom šireg metodičkog znanja o novim teorijama i trendovima) bilo mnogo lakše jednostavno reducirati sadržaje nego dobro promisliti o njima i reorganizirati ih. Na kraju valja spomenuti navod Backe-Neuwald (vidi [1]) da se gotovo 80 % učitelja razredne nastave složilo s tvrdnjom da je nastava geometrije zanemarena te da uglavnom služi za zabavu.

O smanjenju geometrijskih sadržaja u hrvatskim učionicama svjedoči i Antonija Horvatek (vidi [4]) kada konceptualizira problem kvalitetne nastave matematike na primjeru procjene i mentalnog računa u cjelini Razlomci. Autorica priznaje da ako želi kvalitetno obraditi ove sadržaje u šestom razredu, za to joj treba mnogo vremena i stoga neke druge sadržaje mora reducirati: "Najčešće smanjim broj sati u geometriji, no time nisam zadovoljna jer tada neke stvari u njoj zaista "preletimo", a smatram da to nije dovoljno dobro" (str. 19). Tu vidimo da, osim kurikula, i sami nastavnici u praksi reduciraju geometrijske sadržaje.

Osim toga, pokazalo se da geometrijski zadaci iz hrvatskih udžbenika pretežito traže rutinska računanja (vidi [2]). Drugim riječima, poučavanje geometrije svelo se na baratanje brojevima i izrazi-ma kroz različite formule za opseg, površinu i sl., a vladanje istinskim geometrijskim konceptima i odnosima između geometrijskih objekata te razvoj geometrijskog mišljenja stavljeni su u drugi plan.

Ovi nalazi ukazuju na pitanje o kompetencijama koje učenici danas zapravo dobivaju na nastavi geometrije te o stavovima prema učenju geometrije (vidi [3] i [7]). Također, postavlja se i pitanje o budućnosti nastave geometrije te o promišljenom pristupu kurikulima iz geometrije i dilemama što uistinu možemo izbaciti, a što trebamo zdušno braniti da ostane u programu geometrije. Novosti poput softvera dinamične geometrije i njihovih potencijala za učenje otkrivanjem također treba uklopiti u geometrijske školske sadržaje i programe (vidi [6]).

Fundamentalne ideje

Prema odlukama kongresa ICME-7 (eng. *International Congress on Mathematical Education*) te preporukama krovne organizacije ICMI (eng. *International Commission of Mathematical Instruction*) vezanima uz geometrijske sadržaje u kurikulumima i o promišljanju uloge geometrije i poučavanja geometrije u 21. stoljeću, započete su ozbiljne diskusije o ovoj očitijoj krizi u nastavi geometrije (vidi [8]). Jedan od načina kako se suočiti s time je ideja organiziranja koherentnog kurikula geometrije koji se zasniva na "sveobuhvatnim idejama" (eng. *overarching ideas*) ili na "**fundamentalnim idejama**" (npr. [17] i [20]). Progovorilo se i o potrebi međunarodnog usklađivanja geometrijskog obrazovanja te kako je nužno razmotriti ciljeve nastave geometrije na različitim razinama obrazovanja i prema različitim kulturnim tradicijama i okruženju (vidi [8]).

Ova ideja strukturiranja matematičkog kurikula oko fundamentalnih ideja (npr. vidi [16] i [18]) poznata je još od 1970-ih godina. Fundamentalne ideje se u literaturi mogu interpretirati na više načina (vidi [14]). Winter (vidi [19]) opisuje fundamentalne ideje kao matematičke ideje koje su snažno povezane s realnošću i mogu se iskoristiti za stvaranje različitih aspekata i pristupa matematici. One se karakteriziraju visokim stupnjem unutarnjih veza i povezivanja, kao i postupnim i neprekidnim razvojem u svakom razredu (vidi [14] i [17]). Schweiger (vidi [16]) opisuje fundamentalnu ideju kao skup akcija, strategija ili tehnika koji:

- se može naći u povijesnom razvoju matematike
- se u kurikulumu održivo pojavljuje kroz čitavu vertikalu
- je prikladan za razgovor o matematici te odgovara na pitanje što matematika jest
- nastavu matematike čini fleksibilnijom i transparentnijom
- posjeduje odgovarajući lingvistički ili akcijski prototip u svakodnevnom životu.

Mammana i Villani [8] popisuju nekoliko različitih sveobuhvatnih ideja za kurikulum geometrije u 21. sto-

ljeću, poput ideje mjerenja, preslikavanja, projekcije i topologije, zatim ideje geometrijskih oblika, transformacija, kao i ideju veze s aritmetikom. Primjerice, nastavni standardi Sjedinjenih Američkih Država *Principles and Standards for School Mathematics* donose sadržajni okvir za geometriju organiziran oko fundamentalnih ideja Oblici i svojstva, Transformacije, Pozicije i Vizualizacije (vidi [17]). U ovom radu prikazat ćemo konceptualizaciju fundamentalnih ideja u geometriji kako ih je prikazao njemački metodičar matematike Wittmann.

Wittmanovih 7 fundamentalnih ideja

Wittmann [20] predlaže da bi školska geometrija trebala biti organizirana oko sljedećih sedam fundamentalnih ideja:

- geometrijski oblici i njihove konstrukcije
- operacije s oblicima
- koordinate
- mjerenje
- uzorci
- oblici iz svakodnevice
- geometrizacija.

Neke od ovih ideja odnose se samo na geometriju, dok druge prikazuju vezu s algebrom, brojevima i operacijama (vidi [1]).

Fundamentalna ideja *Geometrijski oblici i njihove konstrukcije* strukturalno se u školskoj matematici bazira na trodimenzionalnom prostoru i njegovim podskupovima. Ona se odnosi na usvajanje i razumijevanje pojma točke, jednodimenzionalnih objekata (pravci, krivulje i njihovi dijelovi), dvodimenzionalnih (plohe i njihovi dijelovi) te trodimenzionalnih objekata (geometrijska tijela i ostali dijelovi prostora). Geometrijski objekti mogu se prikazati na brojne načine (npr. s pomoću materijala, geometrijskog pribora za crtanje i sl.) kojima se njihova svojstva obilježavaju.

Operacije s oblicima odnose se na razumijevanje različitih geometrijskih operacija (poput translacije, rotacije, zrcaljenja, centralne simetrije, homotetije, kombinacije preslikavanja i sl.) te na pitanja kako te operacije utječu na svojstva oblika s kojima se operira. Učenik treba razumjeti da neke operacije početni oblik preslikavaju u njemu sukladan oblik, dok ga druge mijenjaju prema određenim matematičkim pravilima.

Fundamentalna ideja *Koordinate* naglašava razumijevanje kako pozicija različitih geometrijskih objekata može biti opisana s pomoću koordinatnog sustava. Koordinatni se sustav može prikazati na pravcu, u ravnini, na plohama ili u prostoru.

Mjerenje se odnosi na shvaćanje da geometrijski objekti mogu biti kvalitativno i kvantitativno opisani (npr. duljina, površina, obujam, mjera kuta).

Uzorci se odnose na shvaćanje da postoji mnogo načina povezivanja točaka, pravaca, likova i tijela na način da nastaju određeni geometrijski uzorci.

Fundamentalna ideja *Oblici iz svakodnevice* odnosi se na razumijevanje da se realni objekti, kao i operacije s njima i među njima, mogu opisati s pomoću geometrije. Primjerice, grafike, slike i skulpture sadrže geometrijske oblike kao sredstva izražavanja.

Geometrizacija se odnosi na shvaćanje da objekti, svojstva i problemi iz okruženja mogu biti prevedeni u jezik geometrije. Primjerice, svojstva nekih brojeva mogu se prikazati geometrijski (npr. trokutasti brojevi). Teorija grafova i deskriptivna geometrija sa svojim projekcijama također igraju važnu ulogu u ovom kontekstu.

Wittmannove (vidi [20]) fundamentalne ideje su u skladu s preporukama ICMI studije za nove kurikule geometrije (vidi [8]). One čine dobru bazu za promišljanje o novim kurikulumima geometrije i o prohodnosti ovih ideja kroz obrazovnu vertikalu. Također, one su i dobre smjernice učiteljima matematike o važnosti geometrijskih ideja u poučavanju.

Implementacija fundamentalnih ideja u nove kurikule

Mnoge su zemlje posljednjih godina počele ozbiljno promišljati te implementirati fundamentalne ideje o geometriji u svoje nacionalne kurikule za matematiku. Ovdje ćemo pokazati primjer iz razredne nastave, tj. primarnog obrazovanja. Primjerice, u njemačkom kurikulumu za matematiku (vidi [15]) prisutno je svih sedam fundamentalnih ideja u primarnom obrazovanju (do kraja 6. razreda). Stoga možemo reći da njemački kurikulum reflektira višedimenzionalni pristup geometriji, iako je intenzitet bavljenja pojedinim idejama različit. Primjerice, fundamentalne ideje *Geometrijski oblici i njihove konstrukcije* te *Mjerenje* dominiraju geometrijskim sadržajima od samog početka školovanja, dok je fundamentalnim idejama *Koordinate* i *Uzorci* posvećeno manje pažnje (vidi [7]).

Analiza fundamentalnih ideja u hrvatskom Nastavnom planu i programu za razrednu nastavu (Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta [10]) pokazuje također da se do 4. razreda velik naglasak stavlja na samo dvije od mogućih sedam fundamentalnih ideja, a to su: *Geometrijski oblici* i *Mjerenje* (vidi [3]). Od geometrijskih oblika, dokument (vidi [10]) spominje točku, pravac, polupravac, dužinu i kružnicu, od dvodimenzionalnih plohu, geometrijske likove i kut, a od trodimenzionalnih geometrijska tijela. Mjerenje u razrednoj nastavi prema Nastavnom planu i programu obuhvaća duljinu dužine, opseg lika, površinu pravokutnika i kvadrata te obujam kocke i mjerenje obujma tekućine. Do 6. razreda dodaju se još neke nove fundamentalne ideje, poput operacija (npr. osna simetrija), ali u malom obimu. Uz to, u teorijskom dijelu teksta stoji i ideja o primjeni geometrije u svakodnevicu. Analiza pokazuje da se do osmog razreda u Nastavnom planu i programu spominju pet od sedam fundamentalnih ideja, što znači da postoji višedimenzionalnost ideja, iako bez kontinuiteta kroz obrazovnu vertikalu i s vrlo velikim oscilacijama u udjelu pojedinih tema. Primjećuje se dominacija Geometrijskih oblika s više od polovice svih geometrijskih tema, a zatim *Mjerenje*, dok su *Operacije s oblicima*, *Koordinate* i *Oblici u svakodnevicu* jedva prisutni. Stoga pos-

toji prostor za unapređenje obrazovnih postignuća prema ostalim fundamentalnim idejama u geometriji.

Novi predmetni kurikulum za matematiku (Ministarstvo znanosti i obrazovanja [11]) do četvrtog razreda uključuje neke nove sadržaje, poput osnova prikaza i analize podataka te nekih osnovnih pojmova iz vjerojatnosti. Uvedeni su i uzorci, što obuhvaća i geometrijske uzorke pa je time uključena još jedna fundamentalna ideja koja do sada nije bila formalno prisutna. S druge strane, primjećuje se smanjeni udio 3D geometrijskih sadržaja jer su kocka i kvadar te obujam kocke prebačeni u 5. razred. Ovime dobivamo da je u razrednoj nastavi geometrija prostora (bez mjerenja obujma tekućine) svedena samo na imenovanje geometrijskih tijela na početku prvog razreda te prepoznavanje brida kao dužine u drugom razredu. Fundamentalne ideje koje nalazimo u primarnom obrazovanju drugih zemalja, npr. Njemačke [15], kao i TIMSS okviru [9], poput osne simetrije i prostornog zora, nisu dio novog predmetnog kurikula za matematiku u razrednoj nastavi (vidi [11]).

Zaključak

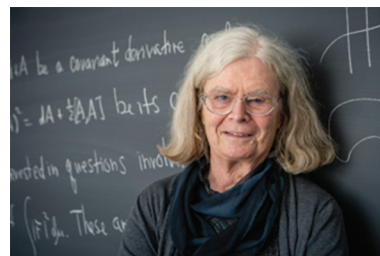
Trend smanjenja geometrije u kurikulumima treba ozbiljno razmotriti, promisliti o njemu te dobiti uvid u širu sliku kako s teorijske strane, tako i sa strane prakse u različitim zemljama vezano uz ovaj fenomen. Rekonceptualizacija geometrijskih sadržaja ide u smjeru napuštanja starih kurikula u kojima se geometriji pristupalo na nekritički način, kao "staroj dami" o kojoj se ne brine dovoljno, već se, naprotiv, počelo promišljati o konceptualizaciji školske geometrije tako da se sadržaji, zahtjevi i ishodi koncentriraju oko propisanih tzv. fundamentalnih ideja koje se onda trebaju provlačiti kroz sve stupnjeve obrazovanja, primjereno dobi i mogućnostima učenika. Na taj način će učenici dobiti širu i dublju sliku o geometriji te upoznati višedimenzionalnost prirode geometrije koja se postupno razvija. Obzirom na to da je prostorni zor jako bitan za razvoj djeteta, ova bi problematika trebala biti prepoznata na svim razinama matematičkog obrazovanja i obrazovnih politika.

LITERATURA

- 1/ D. Backe-Neuwald (2000.): *Bedeutsame Geometrie in der Grundschule: Aus Sicht der Lehrerinnen und Lehrer, des Faches, des Bildungsauftrages und des Kindes*, Doktorska disertacija, Universität Paderborn.
- 2/ D. Glasnović Gracin (2011.): *Requirements in mathematics textbooks and PISA assessment*, Doktorska disertacija, University of Klagenfurt, Klagenfurt.
- 3/ D. Glasnović Gracin i A. Kuzle (2018.): Drawings as external representations of children's mathematical ideas and emotions in geometry lessons, *CEPS – Center for Educational Policy Studies Journal*, 8(2), str. 31–53.
- 4/ A. Horvatek (2016.): Mentalni račun... Opet sam u zaostatku! – 1. dio, *Matematika i škola* 86, str. 15–19.
- 5/ K. Jones (2000.): Critical issues in the design of the geometry curriculum, *Readings in mathematics education*, University of Auckland, Auckland, New Zealand, str. 75–90.
- 6/ A. Kuzle, R. Biehler i sur. (2018.): GEOMETRIE kompakt NRW, izašlo u: R. Biehler, T. Lange, T. Leuders, P. Scherer and B. Rösken-Winter (ur.), *Mathematikfortbildungen professionalisieren. Konzepte, Beispiele und Erfahrungen des Deutschen Zentrums für Lehrerbildung Mathematik*, Festschrift für Jürg Kramer, Wiesbaden, Springer Verlag.
- 7/ A. Kuzle, D. Glasnović Gracin, M. Klunter (2018.): Primary grade students: fundamental ideas of geometry revealed via drawings, izašlo u: E. Bergqvist, M. Osterholm, C. Granberg, L. Sumpter (2018.): *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics*, sv. 3, str. 283-290, Umea, Sweden: PME.
- 8/ C. Mammana i V. Villani (1998.): *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: an ICMI study*, Dodrecht, The Netherlands: Kluwer.
- 9/ I. V. S. Mullis i M. O. Martin (2013.): *TIMSS 2015 assessment frameworks*, Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.
- 10/ MZOS [Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta] (2006.): *Nastavni plan i program za osnovnu školu*, Zagreb: Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta.
- 11/ MZO [Ministarstvo znanosti i obrazovanja] (2019.): *Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije*, Zagreb: Ministarstvo znanosti i obrazovanja.
- 12/ OECD - Organisation for Economic Co-operation and Development (2003.): *The PISA 2003 assessment framework – mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills*, <http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/46/14/33694881.pdf>
- 13/ H. Radatz (1989.): Die Geometrie nicht vernachlässigen! *Grundschule*, 21(12), str. 17–19.
- 14/ S. Rezat, M. Hattermann i A. Peter-Koop (2014.): *Transformation – A fundamental idea of mathematics education*, Springer, New York.
- 15/ RLP – Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Wissenschaft Berlin, Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg, (ur.) (2015.): *Rahmenlehrplan Jahrgangsstufen 1–10, Teil C, Mathematik*, Berlin, Potsdam.
- 16/ F. Schweiger (2010.): *Fundamentale Ideen [Fundamental ideas]*, Aachen, Germany: Shaker.
- 17/ J. Van de Walle i L. H. Lovin (2006.): *Teaching student-centered mathematics, Grades 5 – 8*, Pearson, Boston.
- 18/ H. J. Vollrath (1978.): Rettet die Ideen! [Save the ideas!], *Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht*, 31, 449-455.
- 19/ H. Winter (1976.): Was soll Geometrie in der Grundschule, *Zentralblatt Didaktik der Mathematik*, 8, str. 14–18.
- 20/ E. Ch. Wittmann (1999.): Konstruktion eines Geometrieunterrichts ausgehend von Grundideen der Elementargeometrie, izašlo u: H. Henning (ur.), *Mathematik lernen durch Handeln und Erfahrung. Festschrift zum 75. Geburtstag von Heinrich Besuden*, str. 205–223.

Karen Keskulla Uhlenbeck, dobitnica Abelove nagrade za 2019. godinu

Abelova nagrada najprestižnija je nagrada za matematiku i dodjeljuje se od 2003. godine za iznimna postignuća i doprinos razvoju matematičkog područja. Ove je godine Norveška akademija znanosti nagradu dodijelila Amerikanki Karen Keskulli Uhlenbeck, profesoricu na Sveučilištu Texas u Austinu.



Profesorica Uhlenbeck nagrađena je za svoja pionirska postignuća u geometrijskim parcijalnim diferencijalnim jednačbama, teoriji kalibra i integriranim sustavima. Pomogla je i oformiti područje poznato kao geometrijska analiza. Abelovu nagradu uručit će joj norveški kralj Harald V. na svečanoj ceremoniji koja će se održati u Oslu, 21. svibnja 2019. Karen Uhlenberg time je postala prva žena u povijesti kojoj je pripala ova prestižna nagrada.

Izvor: <http://www.abelprize.no/nyheter/vis.html?tid=74161>